

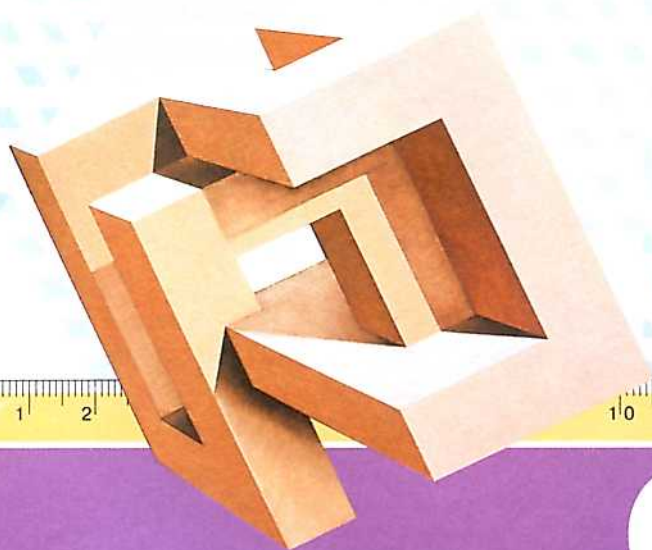
A

Российская академия наук
Российская академия образования
Издательство «Просвещение»

Л.П. Евстафьева А.П. Карп

АЛГЕБРА

Дидактические
материалы



9


ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

А

Российская академия наук
Российская академия образования
Издательство «Просвещение»

Л.П. Евстафьева А.П. Карп

АЛГЕБРА

Дидактические материалы

9 класс

6-издание

Москва
«Просвещение»
2011

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21
Е26

*Серия «Академический школьный учебник»
основана в 2005 году*

Проект «Российская академия наук, Российская академия
образования, издательство «Просвещение» —
русской школе»

Руководители проекта:
вице-президент РАН, акад. *В. В. Козлов*,
президент РАО, акад. *Н. Д. Никандров*,
управляющий директором издательства «Просвещение»,
чл.-корр. РАО *А. М. Кондаков*

Научные редакторы серии:
акад. РАО, д-р пед. наук *А. А. Кузнецов*,
акад. РАО, д-р пед. наук *М. В. Рыжаков*,
д-р экон. наук *С. В. Сидоренко*

Евстафьева Л. П.
Е26 Алгебра. Дидактические материалы. 9 класс /
Л. П. Евстафьева, А. П. Карп; Рос. акад. наук,
Рос. акад. образования, изд-во «Просвещение». —
6-е изд. — М.: Просвещение, 2011. — 126 с.: ил. —
(Академический школьный учебник). —
ISBN 978-5-09-026135-7.

Книга содержит упражнения по алгебре, функциям и анализу данных к учебнику «Алгебра. 9 класс» под редакцией Г. В. Дорофеева. Дидактические материалы включают обучающие работы с заданиями разного уровня сложности и проверочные работы для организации текущего оперативного контроля.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-026135-7

© Издательство «Просвещение», 2010
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2010
Все права защищены

Предисловие

Дидактические материалы предназначены для организации самостоятельной дифференцированной работы учащихся и содержат разнообразный материал, который может быть использован на различных этапах изучения темы и для разных групп учащихся.

Книга имеет два раздела:

I. Обучающие работы.

II. Проверочные работы.

В каждом из разделов работы распределены по пяти главам, названия которых совпадают. Внутри глав все работы имеют сквозную нумерацию.

Обучающие работы (О-1, О-2 и т. д.) нацелены на формирование важнейших умений и навыков при изучении материала 9 класса. Они предназначены для организации обучения в текущем учебном процессе и используются, когда упражнений учебника недостаточно для отработки навыков, для дополнительной работы с отстающими учениками, для развития математических знаний и умений школьников. По названию обучающей работы определяется ее место в учебном процессе.

Большинство обучающих работ содержит опорные сведения, в которых приводятся образцы решения основных задач, правила, некоторые термины и т. п. Далее следуют задания разного уровня сложности, разбитые на две части горизонтальной чертой. Задания первой части направлены прежде всего на достижение уровня обязательной подготовки. Задания второй части предназначены для овладения изучаемым материалом на более высоком уровне. Наиболее трудные задания отмечены звездочкой. Обучающие работы не регламентированы по времени и могут использоваться отдельными фрагментами на различных этапах формирования конкретного умения как для самостоятельной дифференцированной работы, так и для фронтальной работы с классом.

Работы рубрики «*Проверь себя!*» содержат задания с выбором ответа и снабжены «ключом» — перечнем верных ответов. Они предназначены для самостоятельного обзора и повторения законченных фрагментов учебного материала.

Проверочные работы (П-1, П-2 и т. д.) охватывают весь материал курса. Они предназначены для организации текущего оперативного контроля и рассчитаны на 10—15 мин. Эти работы представлены в двух вариантах одного уровня сложности. Многие из них содержат по одному заданию сравнительно более высокой сложности, отмеченному звездочкой. Эти задания могут быть опущены или включены в состав работы в зависимости от ситуации по усмотрению учителя.

Главы 1, 3 написаны Л. П. Евстафьевой, главы 2, 4, 5 — А. П. Карпом.

Раздел I. ОБУЧАЮЩИЕ РАБОТЫ

Глава 1. Неравенства

О-1. Действительные числа

1. Вычислите значение каждого из данных выражений и укажите, какие из них относятся к отрицательным рациональным числам; к положительным иррациональным числам:

1) а) $-2 \cdot 3^0 - 17 \cdot 0,2$; 2) а) $\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) \cdot 1\frac{5}{7}$;

б) $\sqrt{13^2 - 12^2} - \sqrt{1,21}$; б) $(3,74 - 5,74)^2$;

в) $\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{12}$; в) $\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$;

г) $1\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$; г) $\frac{2^6 \cdot 2^3}{(2^4)^2}$.

2. Найдите значения выражений при указанных значениях букв. Укажите, есть ли среди ответов натуральные числа; отрицательные иррациональные числа:

1) а) $-2a^2 + b^2$ при $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{5}$;

б) $ab - ac$ при $a = 0,7$, $b = 1,4$, $c = -0,6$;

в) $-\sqrt{2a - 3}$ при $a = 4,5$;

г) $m^2 + 2mn + n^2$ при $m = 1,26$, $n = 1,74$;

2) а) a^2b^2 при $a = -0,4$, $b = 2,5$;

б) $7ab - 8cd + 3ab - 2cd$ при $a = 5$, $b = -0,4$, $c = 0,6$, $d = 15$;

в) $-\sqrt{a^2 - 2b}$ при $a = -5$, $b = -3$;

г) $4x^2 - 4x + 1$ при $x = 3,5$.

3. Решите уравнения и укажите корни, которые являются рациональными числами:

1) а) $2x - 3 = 1 - 5x$;

2) а) $(2x - 3)(2x + 3) = 7$;

б) $(2x + 1)(x + \sqrt{2}) = 0$;

б) $(3x - 5)(x - \sqrt{3}) = 0$;

в) $x^2 - 4x = 0$;

в) $x^2 - 6x + 9 = 0$;

г) $x^2 = 2$;

г) $x^2 = 7$.

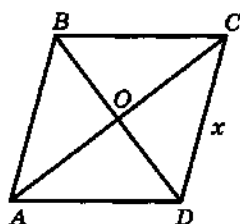


Рис. 1

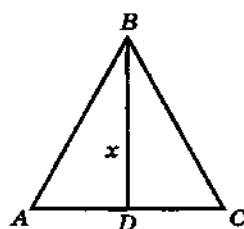


Рис. 2

4. Найдите значение x и укажите, рациональным или иррациональным числом оно является, если:

1) $ABCD$ — ромб (рис. 1):

а) $BD = 6$, $AC = 8$;

б) $BD = 6$, $AC = 10$;

2) $\triangle ABC$ — равносторонний, BD — медиана (рис. 2):

а) $AB = 6$;

б) $AB = 3\sqrt{3}$.

5. Изобразите на координатной прямой числовой промежуток и отметьте на нем те из указанных чисел, которые ему принадлежат:

а) $[0; 4]$, 2 , $-\sqrt{9}$, $1\frac{2}{3}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{0}$;

б) $(-1; 3]$, $-\sqrt{\frac{9}{2}}$, $1,5$, $\sqrt{10}$, -2 , $-\sqrt{3^0}$;

в) $[-2; 4)$, -1 , $\sqrt{\frac{0}{3}}$, $-\sqrt{4}$, $-2\frac{1}{3}$, $\sqrt{16}$;

г) $(-3; 3)$, -2 , $-\sqrt{9}$, $\sqrt{17}$, $1\frac{1}{4}$, $\sqrt{\frac{54}{6}}$.

6. Отметьте на координатной прямой корни следующих уравнений:

1) а) $(2x - 5)(x + 3) = 0$;

2) а) $x^2 + 8x + 16 = 0$;

б) $2x^2 - 6 = 0$;

б) $2x^2 - 8 = 0$;

в) $x^2 - x - 6 = 0$;

в) $(x - 2)(x + \sqrt{2}) = 0$;

г) $x^2 - 4x = 0$;

г) $(x - 2)(x - 3) = x^2 + 1$.

7. Каждое из следующих уравнений имеет два корня: x_1 и x_2 . Рациональным или иррациональным числом является сумма этих корней? произведение этих корней?

1) а) $x^2 - 4x = 0$;

2) а) $x^2 - 10 = 0$;

б) $x^2 - 7 = 0$;

б) $x^2 - \sqrt{3}x = 0$;

в) $x^2 + \sqrt{2}x = 0$;

в) $3x^2 - 8x + 5 = 0$;

г) $2x^2 - 7x + 5 = 0$;

г) $x^2 - 2x - \sqrt{2} = 0$.

д) $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$;

8. Сравните меньший корень уравнения с числом $\sqrt{2}$:

а) $x^2 + \sqrt{3}x = 0$;

в) $x^2 = 9$;

б) $(2x - 3)(3x - 25) = 0$;

г) $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

9. Докажите, что значение каждого из данных выражений является числом рациональным:

а) $\sqrt{58,5^2 - 22,5^2}$;

б) $\sqrt{13,7^2 - 2 \cdot 13,7 \cdot 17,2 + 17,2^2}$;

в) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})$;

г) $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$.

10. Проверьте, что значение каждого из данных выражений иррационально:

а) $\sqrt{2^2 + 5^2}$;

б) $\sqrt{1,5 \cdot 7,2 - 1,5 \cdot 3,2}$;

в) $\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80} - \sqrt{125}$;

г) $\sqrt{(5 + \sqrt{2})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} - 4$.

11. Является ли неотрицательным числом значение данного выражения при данных значениях букв:

а) $\frac{25x^2 - 60xy + 36y^2}{36y^2 - 25x^2}$ при $x = 2,2$, $y = 3$;

б) $\frac{a^2 - ab + 3a - 3b}{a^2 + 3a}$ при $a = b = -4,7$;

в) $\frac{2a^2 - 3a - 2}{1 - 4a^2}$ при $a = -3,478$;

г) $\frac{x^2 - 2x}{x - 2} - \frac{x^2 - 9}{x + 8}$ при $x = \sqrt{2} - \sqrt{3}$?

12. Сравните значения выражений:

а) $\sqrt{5,6}$ и $\sqrt{6,2}$;

в) $-\sqrt{5,6}$ и $-\sqrt{6,2}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{5,6}}$ и $\frac{1}{\sqrt{6,2}}$;

г) $-\frac{1}{\sqrt{5,6}}$ и $-\frac{1}{\sqrt{6,2}}$.

13. Сравните с нулем числа:

- а) $\sqrt{3} - 1,8$; в) $-1,6278 + 1,62708$;
б) $2\sqrt{45} - 3\sqrt{20}$; г) $-3\sqrt{7} + 2\sqrt{17}$.

• Проверь себя!

1. Значение какого выражения является положительным рациональным числом?

- А. -2^0 . Б. $0,3^2 - 0,3$. В. $\sqrt{\frac{0,128}{0,2}}$.

2. При каком из данных значений переменной a значение выражения $\sqrt{5a - a^2}$ — число иррациональное?

- А. $a = 2$. Б. $a = 0$. В. $a = 1$.

3. Какое из данных чисел принадлежит промежутку $[-1; 2)$?

- А. $-\sqrt{\frac{5}{2}}$. Б. $\sqrt{4}$. В. $\sqrt{1,69}$.

4. Какой знак надо поставить между числами $-\frac{1}{3}$ и $-0,336$, чтобы полученное утверждение было верным?

- А. $>$. Б. $=$. В. $<$.

5. Какой знак надо поставить между числами $\frac{1}{\sqrt{6} - 0,1}$ и $\frac{1}{\sqrt{6} + 0,1}$, чтобы равенство было верным?

- А. $<$. Б. $>$. В. $=$.

6. У какого из уравнений корнями являются только рациональные числа?

- А. $(2x - 7)(x + \sqrt{11}) = 0$. Б. $(x - 8)(x - \sqrt{0,36}) = 0$.
В. $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{3}) = 0$.

7. Какое из утверждений верно?

- А. $-0,35 \in \mathbb{Z}$. Б. $\sqrt{6,4} \in \mathbb{Q}$. В. $-\sqrt{7} \in \mathbb{R}$.

8. Какое из утверждений верно?

- А. $\sqrt{(2 - \sqrt{10})^2} = 2 - \sqrt{10}$.

В. $\sqrt{(2 - \sqrt{10})^2} = \sqrt{10} - 2.$

B. $\sqrt{(2 - \sqrt{10})^2} < 1$.

• 1.452.643.47 **В А В А Б Б В Б**

О-2. Общие свойства неравенств

Свойства равенства	Свойства неравенства
1. Если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$	1. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$
2. Если $a = b$, то $a + c = b + c$	2. Если $a < b$, то $a + c < b + c$
3. Если $a + b = c$, то $a = c - b$	3. Если $a + b > c$, то $a > c - b$
4. Если $a = b$, то $ac = bc$	4. Если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$ Если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$
5. Если $a = b$ и $c = d$, то $a + c = b + d$	5. Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$
6. Если $a = b$ и $c = d$, то $ac = bd$	6. Если $a < b$ и $c < d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac < bd$

1. Проверьте, верно ли каждое из неравенств:

1) а) $\frac{2}{7} < \frac{5}{14}$;

В) $\frac{3}{17} > 0,17$;

6) $\frac{3}{8} > \frac{3}{11}$;

$$\Gamma) -\frac{2}{x} < -0,36;$$

2) а) $(-1)^2 > -\frac{1}{4}$;

B) $2^2 + 3^2 < 5^2$;

$$6) -1^2 < -\frac{1}{4};$$

г) $\sqrt{5^2 - 3^2} > 2$.

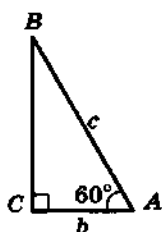


Рис. 3

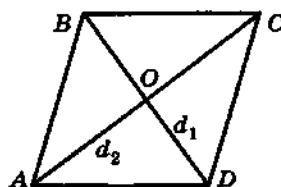


Рис. 4

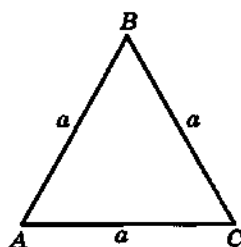


Рис. 5

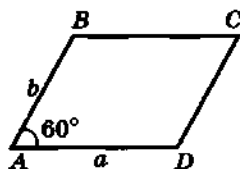


Рис. 6

6. 1) Известно, что $c < a < d$ и $m < b < n$. Найдите границы для $a+b$ и $a-b$.
- 2) Найдите границы для выражений $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ и $\sqrt{5} - \sqrt{3}$, если $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ и $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$.
7. 1) Известно, что $2,4 \text{ см} < b < 2,5 \text{ см}$, $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$. Оцените периметр и площадь треугольника, изображенного на рисунке 3, указав границы числом с одним знаком после запятой.
- 2) $ABCD$ — ромб; d_1 и d_2 — длины его диагоналей, про которые известно, что $2,4 \text{ см} < d_1 < 2,5 \text{ см}$ и $3,6 \text{ см} < d_2 < 3,7 \text{ см}$. Оцените площадь ромба, изображенного на рисунке 4, указав границы числом с одним знаком после запятой.
- 3) Определите площадь равностороннего треугольника, изображенного на рисунке 5, указав границы числом с одним знаком после запятой, если $2,5 \text{ см} < a < 2,6 \text{ см}$; $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$.
- 4) Определите площадь и периметр параллелограмма, изображенного на рисунке 6, если $3,2 \text{ см} < a < 3,3 \text{ см}$; $2,5 \text{ см} < b < 2,6 \text{ см}$; $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$.
8. Используя свойства неравенств (см. табл. на с. 9), докажите, что данные неравенства верны при любых значениях a и b . Укажите те значения a и b , при которых имеет место равенство:
- а) $a^2 + 4 > 4$; в) $-b^2 - 3 < -3$;
 б) $a^2 + 2a + 1 + b^2 > 0$; г) $a^2 + 4a + 4 + b^2 - 6b + 9 > 0$.
9. Используя свойства неравенств, оцените сумму, разность, произведение и частное чисел a и b , если $2,5 < a < 2,6$; $3,4 < b < 3,5$.

О-3. Решение неравенств

1. Докажите, что любое из чисел -2 ; 0 ; 1 является решением данного неравенства:

1) а) $-5x > -10$;

2) а) $x^2 \geq x$;

б) $3x - 5 \geq -11$;

б) $2y \leq 2$;

в) $y^2 < 9$;

в) $5z - 1 \geq 3z - 5$;

г) $\frac{3}{p-2} \leq \frac{1}{17}$;

г) $\frac{7}{p^2-100} < 0$.

2. Почему любое отрицательное число является решением неравенства:

1) а) $a^2 > a$;

2) а) $0 \cdot y > -5$;

б) $-2x > -6$;

б) $\frac{x}{2} \leq 4$;

в) $-y^2 < 0$;

в) $y^2 - 4y + 4 \geq 0$;

г) $x^2 - 3x \geq 0$;

г) $(a-3)a > 0$?

3. Докажите, что неравенство не имеет решений:

а) $a^2 < 0$;

в) $0 \cdot x > 0$;

б) $x^2 + 4 \leq 0$;

г) $\frac{1}{-x^2} > 0$.

4. Решите неравенство, изобразите множество его решений на координатной прямой и укажите не менее трех решений этого неравенства:

1) а) $x + 5 > 2$;

2) а) $7 - x < 3$;

б) $2x > 4$;

б) $\frac{1}{2}x < 2$;

в) $-3x < 12$;

в) $-\frac{2}{3}x > -4$;

г) $3x - 5 < 7$;

г) $5 - 2x > 3$.

5. Решите неравенство, изобразите множество его решений на координатной прямой:

1) а) $-2(x-3) < 20$;

в) $-\frac{1}{2}(y-4) > -3$;

б) $-3(x-2) < 17$;

г) $-\frac{1}{3}(9-6z) > -5$;

2) а) $x - 2(x-1) \leq 1 + 3(x+4)$;

б) $3(2z-7) - 5(-3z+2) > -2(5z-9) + 4(7z-8)$;

в) $\frac{1}{3}(2x-7) - \frac{1}{2}(-3x+2) < 1-x$;

г) $1,5(4y+9) + 2,5 > -3,5(y-8)$;

$$3) \text{ а) } -\frac{3y}{4} + \frac{2y}{3} \leq \frac{1}{6};$$

$$\text{в) } \frac{2x-1}{4} \leq \frac{3x-5}{5};$$

$$\text{б) } \frac{x-5}{2} > \frac{x+3}{-3};$$

$$\text{г) } -\frac{3x-5}{2} < -\frac{8-x}{3};$$

$$4) \text{ а) } (x-1)(x+2) < (x-3)(x+3);$$

$$\text{б) } (2x-3)^2 \geq 7 + (4x-1)(x-2);$$

$$\text{в) } (x-5)(1-x) \leq 3 - (x-2)^2;$$

$$\text{г) } (x-2)(2+x) \geq 2 - (1-x)(4+x).$$

6. Решите неравенство и укажите, какие из чисел $-\sqrt{2}$, 0 , $\frac{2}{3}$, -100 , $\frac{\sqrt{5}}{2}$ являются его решениями:

$$\text{а) } 2(x-5) + 1 < 3(x+8); \quad \text{в) } 3 - (2x+8) \geq 2 - (7-x);$$

$$\text{б) } \frac{x-2}{3} \leq 1 - \frac{x+5}{2}; \quad \text{г) } -\frac{2}{3}(y-8) \leq -\frac{1}{2}(y-2).$$

7. При каких значениях переменной значение первого из данных выражений не меньше значения второго:

$$\text{а) } 2x-5 \text{ и } -3x+10;$$

$$\text{б) } x(x-3) \text{ и } -x(2-x);$$

$$\text{в) } 1-2(x+5) \text{ и } 4(2x-1)-9;$$

$$\text{г) } \frac{5x-3}{8} \text{ и } \frac{7-2x}{-9}?$$

8. Решите неравенство:

$$1) \text{ а) } 0,87(3z-1) \leq 0,87(1-7z);$$

$$\text{б) } \frac{2}{3}(x-4,4) \geq -\frac{2}{3}(3x+5,6);$$

$$\text{в) } (-2)^{17}(2t+9) < (-2)^{17}(7t-11);$$

$$\text{г) } 24(2x-7) > 48(1-3,5x);$$

$$2) \text{ а) } (\sqrt{3}-7)x < 0;$$

$$\text{б) } (\sqrt{5}-12)z \geq (\sqrt{5}-12) \cdot 2;$$

$$\text{в) } (\sqrt{2}-3)(2x-1) \leq 0;$$

$$\text{г) } \sqrt{2}x > 2x.$$

9. Решите неравенство и укажите какие-нибудь два иррациональных его решения:

$$\text{а) } 5\left(x - \frac{2}{3}\right) < -2;$$

$$\text{б) } -3(x+1) < 2(3,5x+1);$$

$$\text{в) } \frac{2x-3}{7} < \frac{8-x}{-2};$$

$$\text{г) } (3x-5)^2 > (9x-1)x + 54.$$

10. Решите неравенство:

а) $2 - y \geq 3 - (5 + y)$;

б) $3(2t - 1) < 1 + 6(t - 2)$;

в) $\frac{5x-3}{5} \leq \frac{3x+4}{3} - \frac{29}{15}$;

г) $(x-4)(x+4) - 2x > (1-x)^2 - 17$.

11. Докажите, что числа $-2,78$; $-\sqrt{2}$; $3\sqrt{7} - 2\sqrt{5}$ являются решениями каждого из неравенств:

а) $\frac{x-1}{2} \leq \frac{2x}{3}$;

б) $(2y-1)^2 > (2y-7)(2y+17)$.

12. Найдите все целые отрицательные решения неравенства:

а) $\frac{3x-7}{5} - 1 \leq \frac{6-2x}{3}$;

б) $(z-1)(z+1) \geq (z-4)(z+2)$.

13. Найдите целые решения неравенства:

а) $\frac{x-3}{20} - \frac{7-x}{4} > \frac{2x-1}{5} - \frac{1-8x}{10}$, принадлежащие промежутку $[-4; 0]$;

б) $(2-t)(3+t) \leq (8-2t)(3+\frac{1}{2}t)$, принадлежащие промежутку $[14,1; 18,2]$.

14. Решите уравнение:

а) $|x-2|=x-2$;

б) $|2x-5|=5-2x$;

в) $|-2(x-4)|=8-2x$;

г) $|3x-6|=3(x-2)$.

15. При каких значениях a имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{\frac{-3}{1-2a}}$; б) $\sqrt{\frac{3a-5}{-8}}$; в) $\sqrt{\frac{2,34}{1-\frac{a-2}{3}}}$; г) $\sqrt{\frac{2-\frac{a-3}{2}}{0,75}}$?

• Проверь себя!

1. Какое из чисел является решением неравенства $-x > 1$?

А. -2 .

Б. 2 .

В. 0 .

2. Сколько решений неравенства $-2x < 4$ находится среди чисел $\sqrt{5}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{7}$?
- А. Два. Б. Одно. В. Ни одного.
3. Решите неравенство $4 - \frac{x-1}{2} \geq x - \frac{2x+1}{3}$.
- А. $x \leq 3,8$. Б. $x \leq 5,8$. В. $x \geq 5,8$.
4. Укажите промежуток, каждое число которого является решением неравенства
- $$3 - (2x - 1)(x + 3) \geq (4x - 3)(4x + 3) - 2(3x - 5)^2.$$
- А. $[-1; 2]$. Б. $[1; 2]$. В. $[-3; -2]$.
5. Решите неравенство $-2(x - 5) > x - 3(x + 2)$.
- А. Нет решений.
- Б. Решением является любое число.
- В. $x \geq 1$.
6. Сколько целых неотрицательных решений имеет неравенство $\frac{x}{3} - 1 \leq \frac{1}{3}$?
- А. 5. Б. 4. В. 3.
7. Сколько целых решений, модуль которых меньше 3, имеет неравенство $(2x - 1)^2 - 29 \leq (x - 2)(4x - 7)$?
- А. 7. Б. 4. В. 5.

•  А А Б В Б А В

О-4. Решение систем линейных неравенств

1. Изобразите на координатной прямой множество решений каждого неравенства и отметьте штриховкой множество решений системы по образцу:

Образец. $\begin{cases} x \geq 2 \\ x > 3. \end{cases}$

Ответ. $(3; +\infty)$.



$$1) \text{ а) } \begin{cases} x \leq 4 \\ x < 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x > 4 \\ x \leq 2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x \geq 4 \\ x \geq 2; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x < 4 \\ x < 2; \end{cases}$$

$$2) \text{ а) } \begin{cases} x < -6,9 \\ x \geq -3,2; \end{cases}$$

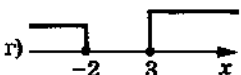
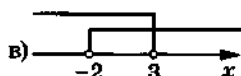
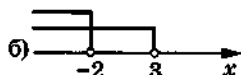
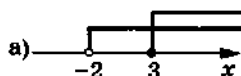
$$\text{б) } \begin{cases} x > -6,9 \\ x \leq -3,2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x \geq -6,9 \\ x \geq -3,2; \end{cases}$$

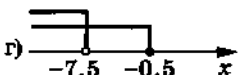
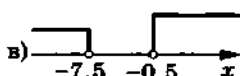
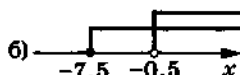
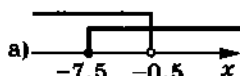
$$\text{г) } \begin{cases} x \leq -6,9 \\ x < -3,2. \end{cases}$$

2. Запишите системы неравенств, решения которых можно проиллюстрировать данными рисунками. Запишите решения.

1)



2)



3. Решите систему неравенств:

$$1) \text{ а) } \begin{cases} 3 - x \geq 5 \\ x - 7 < 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2y - 7 \leq 4 \\ 1 - y < 2,5; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3x - 2 < 4x \\ 3 + 7x > 5x; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 2z - 3 > 4z + 5 \\ 3 - z < 5z + 15; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} 2x \leq 4 \\ -3x \leq -6; \end{cases}$$

$$2) \text{ а) } \begin{cases} -2(y - 3) \leq 3(y + 2) \\ \frac{7y}{3} \leq 1 - \frac{y}{2}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 1 - 2(x - 5) \geq 5 \\ 4x - 3(5 - x) \geq 6; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{x - 3}{2} \geq 13 \\ \frac{2x - 1}{3} < 19; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{z - 1}{2} > \frac{z - 2}{3} \\ 2z - 5 < 3z - 8. \end{cases}$$

4. Решите двойное неравенство двумя способами:

1) а) $-3 \leq x + 2 < 4$;

2) а) $3 < 2 - x < 5$;

б) $-5 < 2t - 2 \leq 7$;

б) $-3 \leq 1 - 2x < 7$;

в) $1 \leq \frac{x+4}{3} \leq 3$;

в) $-2 < \frac{7-t}{2} \leq -1$;

г) $-3 < \frac{2y-5}{2} < 4$;

г) $-3 \leq 1 - \frac{y-3}{2} \leq 4$.

5. Решите систему неравенств:

1) а) $\begin{cases} 2 - (3 - x) \leq 1 - 3(x - 5) \\ 7 - 2(x - 3) > 1 - (2x + 5); \end{cases}$

б) $\begin{cases} -3 < 2x - 1 \leq 5 \\ \frac{-6}{1-4x} > 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |x| \leq 3 \\ \frac{3-5x}{1-x} < 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4x - 5 > 2x - 3 \\ -2x + 4 < -2x + 5 \\ 7 - 5x > -2(x + 1); \end{cases}$

2) а) $\begin{cases} (x - 0,2)(x + 0,2) \geq (x - 0,2)^2 \\ (\sqrt{3} - 2)x < (\sqrt{3} - 2) \cdot 0,2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -3 \leq \frac{x-1}{3} \leq 5 \\ \frac{2x-1}{x-2} \leq 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |t| \leq 5 \\ -\sqrt{3}t < -\sqrt{12}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x - 3 < 3x + 9 \\ -2(x + 5) > 7(x - 5) \\ |x| \leq 0. \end{cases}$

6. Найдите все значения переменной, при которых имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{2a-7} \cdot \sqrt{2-a}$;

в) $\sqrt{1 - \frac{x-1}{2}} - \sqrt{x - \frac{9-x}{2}}$.

б) $\frac{\sqrt{2-a}}{\sqrt{2a-7}}$;

7. а) Найдите наименьшее целое число, являющееся решением системы

$$\begin{cases} 12 + \frac{x+1}{2} - \frac{8x-7}{2} < 13 + \frac{7x-3}{10} \\ 7(3x-5) - 18 \geq 4(x-17) - \frac{5(4x-12)}{2}; \end{cases}$$

- б) найдите наибольшее целое число, являющееся решением системы

$$\begin{cases} x - \frac{3x-1}{2} < \frac{2-x}{4} - \frac{3x+3}{2} + 6 \\ -5x + \frac{5x-4}{2} < 12,5 - (1-3x); \end{cases}$$

- в) найдите наибольшее целое и наименьшее целое решения системы

$$\begin{cases} (\sqrt{2}-5)x \leq 1 \\ (\sqrt{7}-2)x < 3. \end{cases}$$

8. При каких значениях a уравнение $x^2 - 3x + (a-2) = 0$ имеет два корня разных знаков? Укажите одно такое значение a и решите уравнение при этом значении a .

✎ Проверь себя!

1. Какое из данных чисел является решением системы

неравенств $\begin{cases} -\frac{1}{2}x < 3 \\ x^2 > 4x? \end{cases}$

А. -8.

Б. 1.

В. 5.

2. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2-3(1-x) > x-(6x-3) \\ \frac{x-1}{-2} < 3-x. \end{cases}$

А. (0,5; 5).

Б. (0,5; $+\infty$).

В. $(-\infty; 5)$.

3. Укажите наибольшее целое решение двойного неравенства $-3 < 9 - 2x \leq 5$.

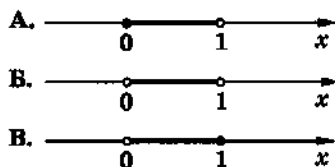
А. 2.

Б. 5.

В. 6.

4. Какой из изображенных числовых промежутков (рис. 7) соответствует множеству решений системы неравенств

$$\begin{cases} 8 - 7x > 3x - 2 \\ -3(2x - 5,3) \leq -3 \cdot (-5,3) \end{cases}$$



5. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} y + 4 \geq 2y + 9 \\ 2y + 10 \geq y - 2. \end{cases}$$

Рис. 7

Укажите, какое из приведенных иррациональных чисел принадлежит множеству ее решений.

А. $-\pi$.

Б. $-\sqrt{12}$.

В. $-\sqrt{77}$.

6. Решите систему неравенств $\begin{cases} 7 - 2(x + 3) < 5 - 2x \\ -1 \leq 2x - 9 \leq 5. \end{cases}$

Какое из указанных множеств является множеством решений данной системы?

А. $[4; 7]$.

Б. $[3; 8]$.

В. $[5; 6]$.

7. Укажите все значения m , при которых имеет смысл выражение $\sqrt{3 - 2m} - \sqrt{2m + 1}$.

А. $\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Б. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

В. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

♦ — В А Б А В А Б

О-5. Доказательство неравенств

1. Сравните числа m и n , если:

1) а) $m - n = 2 - 2 \cdot 0,3$;

б) $m - n = \sqrt{7} - 8,2$;

в) $m - n = \frac{1 - \sqrt{2}}{-2}$;

г) $m - n = (-10)^0$;

2) а) $m - n = 2^3 - 3^2$;

б) $m - n = 2^{-3} - 3^{-2}$;

в) $m - n = 3\frac{1}{3} - 3,3$;

г) $m - n = (5,6 + 3,78)(5,6 - 3,78)$.

2. Как расположена на горизонтальной координатной прямой точка $A(a)$ относительно точки $B(b)$, если:

а) $a-b=3$; б) $a-b=-5$; в) $a-b=0$; г) $a-b=\sqrt{3}$?

3. Объясните, почему каждое из следующих неравенств верно при любых значениях переменных:

1) а) $a^2 \geq 0$;

2) а) $m^2 + n^2 \geq 0$;

б) $a^2 + 4 > 0$;

б) $m^2 + n^2 + 5 > 0$;

в) $(a+4)^2 \geq 0$;

в) $(m-1)^2 + (n+2)^2 \geq 0$;

г) $a^2 - 6a + 9 \geq 0$;

г) $\sqrt{m^2 + 2} > 0$.

4. Докажите, что при любых значениях переменных верно неравенство:

а) $m^2 + 16 \geq 8m$;

в) $x^2 - x \geq -\frac{1}{4}$;

б) $p^2 + 8p + 16 \geq 16p$;

г) $a - 1 \leq \frac{a^2}{4}$.

5. Сравните числа:

а) $2 - 3,4$ и $-2 \cdot 0,71$;

в) $\sqrt{5} - 2$ и $\sqrt{7} - 1,8$;

б) $(3 - 2,67)^2$ и -2^2 ;

г) $\sqrt{10} + \sqrt{2}$ и $\sqrt{11} + \sqrt{3}$.

6. Известно, что $a \geq 3$. Сравните с нулем значения следующих выражений:

1) а) $a - 3$;

2) а) $(a - 2)(1 - a)$;

б) $a - 2$;

б) $(a - 2)(1 - a)^2$;

в) $1 - a$;

в) $(a - 3)^2(1 - a)$;

г) $(a - 3)(a - 2)$;

г) $\frac{(a - 3)(a - 2)}{1 - a}$.

7. Известно, что $-3 < c \leq 1$. Сравните с нулем значения следующих выражений:

1) а) $c - 1$;

2) а) $(c - 1)(c - 5)$;

б) $c + 3$;

б) $(3 + c)(c - 5)^2$;

в) $1 - c$;

в) $(c + 3)(c - 1)^2(c - 5)$;

г) $c - 5$;

г) $\frac{1 - c}{(c + 3)(c - 5)}$.

8. Докажите, что неравенство верно при любых значениях переменных:

1) а) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 1} < 1$;

б) $\frac{a^2 - b^2}{b^2 + 2} > -1$;

- 2) а) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$; б)* $m^4 + n^4 \geq 2p(2mn - p)$.
9. Докажите, что при любых положительных значениях переменных верно неравенство:
 а) $8a^3 - 4a^2b \geq 2ab^2 - b^3$; б) $81x^4 + y^4 \geq 27x^3y + 3xy^3$.
10. Докажите, что при любых значениях переменных верно неравенство:
 а) $(3-p)(p+1) < 4$; б) $4a^2 + 9b^2 \geq 2(2a + 3b - 1)$.

О-6. Что означает «с точностью до...»

- Какие из приведенных в примерах данные можно считать точными, а какие — приближенными:
 а) число учащихся 9 класса школы № 210 С.-Петербурга на 1 сентября составило 26 человек;
 б) книжный фонд библиотеки составляет 30 тысяч книг;
 в) станок состоит из 82 деталей;
 г) синус тридцати градусов равен 0,5;
 д) косинус тридцати градусов равен 0,87?
- Запишите с помощью двойного неравенства длину отрезка l , если известно, что:
 а) $l = 12 \pm 0,2$ см; б) $l = 12 \pm 1$ дм;
 в) $l = 12 \pm 0,1$ м; г) $l = 12 \pm 0,01$ м.
- Пусть $a = 8,6 \pm 0,4$. Какие из значений: 8,71; 8,99; 9,1; 8,1 — может принимать a ?
- Задайте интервал в виде $x \pm h$, если:
 а) $12 \leq x \leq 16$; б) $10,3 \leq x \leq 11,7$;
 в) $12,2 \leq x \leq 12,6$; г) $70 \leq x \leq 80$.
- Масса железнодорожного вагона $m = 63 \pm 0,5$ т. Может ли точное значение массы вагона быть равно: 62,7 т; 63,7 т; 62,4 т; 63,3 т?
- Масса одного железнодорожного вагона равна $62 \pm 0,5$ т, масса другого — $63 \pm 0,5$ т. Может ли масса вагонов быть одинаковой? Если да, то какой?
- Длины двух отрезков l_1 и l_2 записаны следующим образом: $l_1 = 17 \pm 0,2$ см и $l_2 = 16,5 \pm 0,4$ см. Могут ли эти отрезки быть одинаковыми? Если да, то в каких границах будет находиться их длина?

8. Укажите разряд, в котором записана последняя цифра. Подчеркните ее. Запишите результат каждого измерения с указанием его точности и в виде двойного неравенства по образцу:

Образец.

$m \approx 1,14$ кг; $m = 1,14 \pm 0,01$ кг; $1,13 \text{ кг} \leq m \leq 1,15 \text{ кг}$.

а) $m \approx 18$ кг;

в) $I \approx 12$ А;

б) $m \approx 18,0$ кг;

г) $S \approx 13,6 \text{ см}^2$.

9. С какой точностью приведены следующие данные:

а) расстояние от Земли до Солнца $1,5 \cdot 10^8$ км;

б) число Авогадро $6,022045 \cdot 10^{23}$;

в) масса Луны $7,35 \cdot 10^{22}$ кг;

г) расстояние от Земли до Луны $3,84 \cdot 10^8$ м;

д) постоянная Больцмана $1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К;

е) заряд электрона $1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл;

ж) сила тяги каждого из двигателей самолета Ил-62 составляет $1,03 \cdot 10^5$ Н?

10. Запишите сумму $a + b$ в виде $a + b = \dots \pm \dots$, если:

а) $a = 3,6 \pm 0,1$, $b = 5,7 \pm 0,3$;

б) $a = 21 \pm 1$, $b = 32 \pm 2$.

Образец. $a = 4,8 \pm 0,2$, $b = 3,7 \pm 0,3$;

$+ 4,6 \leq a \leq 5$

$+ 3,4 \leq b \leq 4$

$8 \leq a + b \leq 9$, следовательно, $a + b = 8,5 \pm 0,5$.

Посмотрите на данные. Нельзя ли этот ответ получить быстрее? Проверьте на других примерах.

11. Запишите произведение ab в виде $ab = \dots \pm \dots$, если:

а) $a = 3,2 \pm 0,2$, $b = 5,8 \pm 0,2$;

б) $a = 21 \pm 1$, $b = 38 \pm 2$.

Образец. $a = 5,6 \pm 0,1$, $b = 4,4 \pm 0,2$;

$\times 5,5 \leq a \leq 5,7$

$\times 4,2 \leq b \leq 4,6$

$23,10 \leq ab \leq 26,22$, следовательно, $ab = 24,66 \pm 1,56$.

Обычно пишут $23 \leq ab \leq 27$ или $ab = 25 \pm 2$.

12. Длина карандаша $l_1 \approx 12,4$ см, а ширина стола $l_2 \approx 12,4$ дм. Одинакова или нет относительная степень точности этих измерений?

13. Какая из характеристик самолета Ан-24 дана точнее — размах крыла 29,2 м или взлетная масса 21 т?

Глава 2. Квадратичная функция

О-7. Функции (повторение)

1. Заполните таблицу значений данных функций:

x	-1	0	0,5	2
$y = 2x$				
$y = -3x + 2$				
$y = x^2 + 1$				

2. Найдите координаты точек графика функции $y = 3x^2 + 1$, имеющих абсциссы $x = 1$; $x = -2$; $x = 0$.
3. Проходит ли через точки $(0; 2)$, $(1; 2)$, $(-1; -1)$ график функции:
- а) $y = -4x + 2$; б) $y = 2x^2$; в) $y = \frac{3}{x}$?
4. При каких значениях x функция $y = 4x + 6$ принимает значения, равные:
- а) 6; б) 0; в) -1?
5. Найдите координаты точек пересечения:
- а) графика функции $y = x^2$ и прямой $y = 1$;
б) графиков функций $y = 3x + 5$ и $y = 2x + 2$.
6. Найдите нули функции:
- а) $y = 2x + 4$; в) $y = \frac{2}{x} - 1$;
б) $y = -x + 5$; г) $y = -\frac{1}{x} + 1$.
7. Найдите область определения функции:
- а) $y = 2x - 5$; в) $y = \frac{2}{x-1}$;
б) $y = -3x + 6$; г) $y = -\frac{5}{x+2}$.
8. Постройте график функции:
- а) $y = 2x + 1$; в) $y = -4x - 1$;
б) $y = -3x + 2$; г) $y = x + 2$.

Какие из этих функций являются убывающими? возрастающими?

9. Постройте график функции $y = x^2$ на промежутке:
а) $[-1; 1]$; б) $[0; +\infty)$; в) $(-\infty; 0]$.

10. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} x & \text{при } x > 0 \\ x^2 & \text{при } x \leq 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geq 1 \\ 2x & \text{при } x < 1. \end{cases}$

11. Есть ли наибольшее и наименьшее значения у функции:

а) $y = -3x - 1$;

в) $y = -5x + 4$;

б) $y = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 2 \\ x - 1 & \text{при } x < 2; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} -3 & \text{при } x \geq 3 \\ -x & \text{при } x < 3? \end{cases}$

Если есть, то укажите их.

12. Отметьте на координатной плоскости точки $(-1; 0)$, $(1; 2)$, $(-2; 2)$. Отметьте точки, симметричные им относительно прямой:

а) $x = 0$;

б) $x = 1$;

в) $x = -1$.

13. Найдите прямую, относительно которой симметричны точки:

а) $(-1; 0)$ и $(1; 0)$; в) $(-1; 0)$ и $(-1; 4)$.

б) $(-3; 1)$ и $(-5; 1)$;

14. Нарисуйте линию, симметричную:

а) прямой $y = 2$ относительно прямой $x = 0$;

б) прямой $y = 2x$ относительно прямой $x = 1$;

в) прямой $y = -x + 1$ относительно прямой $x = -1$.

О-8. Какую функцию называют квадратичной

Квадратичной называют функцию, которую можно задать формулой вида

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где a , b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$.

1. Укажите, какие из следующих функций являются квадратичными:

а) $y = 2x$;

г) $y = 1 + 2x - 4x^2$;

б) $y = -3x^2 + 1$;

д) $y = \frac{3x^2}{5} - 4$;

в) $y = \frac{3}{x} + x^2$;

е) $y = (2x - 3)^2$.

2. Заполните таблицу значений данных функций:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2 + 2x - 3$					
$y = 2x^2 + 4x$					
$y = -\frac{1}{2}x^2 - x$					

3. Найдите координаты точек пересечения с осью ординат графика функции:

а) $y = x^2 - 8$;

в) $y = 2x^2 + 3x - 11$;

б) $y = -x^2 + x - 4$;

г) $y = -0,5x^2 + x + 32$.

4. Выберите среди графиков, изображенных на рисунке 8, графики квадратичных функций.

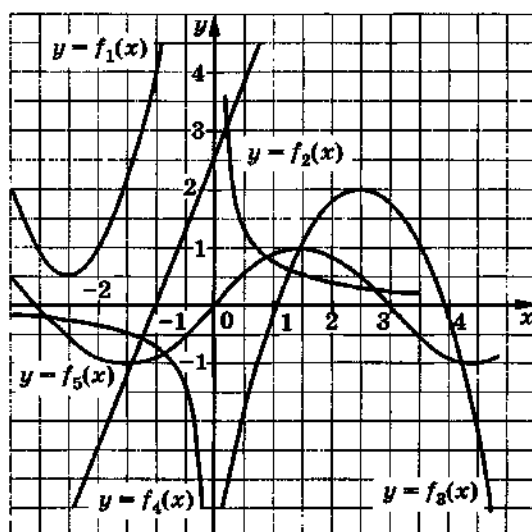


Рис. 8

5. Для каждой параболы, изображенной на рисунке 9, укажите:
- направление ветвей;
 - уравнение оси симметрии;
 - координаты вершины.

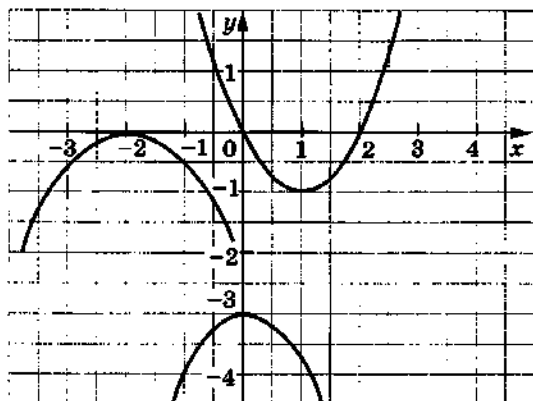


Рис. 9

6. На рисунке 10 изображены графики квадратичных функций. У каких из квадратичных функций есть наибольшее значение? наименьшее значение? Укажите эти значения.

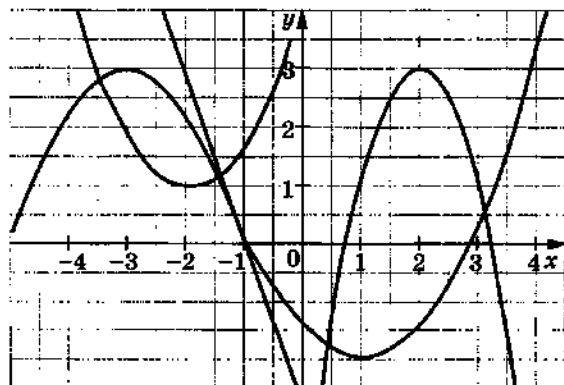


Рис. 10

7. Для каждой из данных функций:
- $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$;
 - $f(x) = -2x^2 + 5$;
 - $f(x) = 4x^2 + 3x - 2$
- найдите значения $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$.
8. На рисунке 11 изображен график квадратичной функции на отрезке $[-1; 5]$. Дорисуйте его на отрезке $[-3; -1]$.
9. На рисунке 12 изображен график квадратичной функции $y = f(x)$ на отрезке $[1; 6]$. Найдите значения $f(-2)$, $f(0)$.
10. Выясните, проходит ли график данной функции $y = f(x)$ через данную точку A , если:
- $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, $A(1; 4)$;
 - $f(x) = -3x^2 + 2x + 2$, $A(0; 1)$;
 - $f(x) = 0,5x^2 - 0,25x + 1$, $A(-1; 1,75)$;
 - $f(x) = -x^2 + 3x$, $A(-2; -16)$.
11. Найдите нули функции:
- $y = x^2 - 6x + 8$;
 - $y = -x^2 + 5x - 4$;
 - $y = 2x^2 + 6x$;
 - $y = -0,5x^2 + 2x$;
 - $y = 3x^2 - x - 2$;
 - $y = -2x^2 + 3x + 5$.
12. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс, если:
- $f(x) = x^2 - 5x$;
 - $f(x) = x^2 - 2$;
 - $f(x) = -0,5x^2 + 2x + 6$;
 - $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

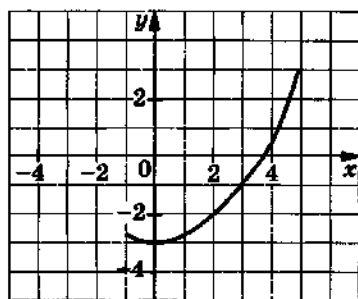


Рис. 11

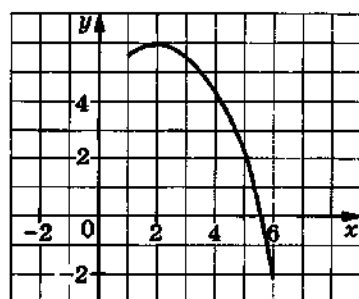


Рис. 12

13. Пересекает ли график данной функции $y=f(x)$ ось абсцисс, если:
- а) $f(x)=2x^2-5x+3$; в) $f(x)=x^2-5x+2$;
 б) $f(x)=3x^2-5x+5$; г) $f(x)=-5x^2-6x-3$?
14. Найдите значения аргумента, при которых $f(x)=a$, если:
- а) $f(x)=0,5x^2-4x+3$, $a=3$;
 б) $f(x)=2x^2-5x+2$, $a=-1$;
 в) $f(x)=-0,5x^2-5x+1$, $a=-11$;
 г) $f(x)=5x^2-x$, $a=6$;
 д) $f(x)=x^2-4x$, $a=1$;
 е) $f(x)=-x^2-4x-3$, $a=1$.
15. Сколько общих точек у графика функции $y=f(x)$ и данной прямой:
- а) $f(x)=x^2-6x$, $y=-9$;
 б) $f(x)=2x^2-4x+1$, $y=2$;
 в) $f(x)=5x^2+2x-1$, $y=-10$;
 г) $f(x)=-0,5x^2-2x$, $y=2$?
16. Найдите координаты точек пересечения графика данной функции $y=f(x)$ и данной прямой:
- а) $f(x)=x^2-8x$, $y=-7$;
 б) $f(x)=-2x^2-6x+5$, $y=-3$;
 в) $f(x)=-0,5x^2+2x$, $y=-2,5$;
 г) $f(x)=0,5x^2+4x+1$, $y=-7$.
17. Имеет ли график функции $y=x^2-10x+10$ общие точки с прямой:
- а) $y=10$; б) $y=0$; в) $y=-15$; г) $y=-20$?
-

18. Приведите пример квадратичной функции, график которой имеет с осью абсцисс:
- а) только одну общую точку;
 б) две общие точки;
 в) три общие точки.

Если это невозможно, объясните почему.

19. Найдите ось симметрии графика функции $f(x)=x^2-3x$, используя следующий план:

- а) найдите значения x , такие, что $f(x) = -2$;
 б) изобразите прямую, относительно которой симметричны точки пересечения графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = -2$.
20. Определите координаты вершины параболы, являющейся графиком функции $y = x^2 + x - 2$. Найдите предварительно ось симметрии графика функции, используя план, предложенный в задаче 19.
21. План поиска оси симметрии графика, предложенный в задаче 19, неприменим для функции $y = x^2 + x$. Объясните почему. Предложите другой план.
22. Постройте графики следующих функций: $y = 2x^2 + 4x$ и $y = -x^2 + 6x - 8$, предварительно определив вершины соответствующих парабол (см. задачи 20 и 21) и вычислив координаты еще нескольких точек.

О-9. График и свойства функции $y = ax^2$

Функция $y = ax^2$

при $a > 0$: убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$; множество ее значений $[0; +\infty)$, наименьшее значение принимает при $x = 0$;

при $a < 0$: возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$, убывает на промежутке $[0; +\infty)$; множество ее значений $(-\infty; 0]$, наибольшее значение принимает при $x = 0$.

1. Заполните таблицу значений данных функций и постройте графики этих функций:

x	-1,5	-1	0	0,5	1
$y = 3x^2$					
$y = -0,25x^2$					
$y = 6x^2$					

2. Постройте график функции на указанной области определения, составив предварительно таблицу ее значений:

а) $y = 4x^2$, где $-1 \leq x \leq 1$;

б) $y = -0,5x^2$, где $-2 \leq x \leq 1$;

в) $y = 0,1x^2$, где $-3 \leq x \leq 2$.

Для каждой функции укажите ее наибольшее и наименьшее значения на заданном промежутке.

3. Даны функции и указаны координаты точки А. Проходит ли график функции через эту точку, если:

а) $y = 7x^2$, А(1; 5);

в) $y = 0,4x^2$, А(5; 10);

б) $y = -4x^2$, А(-1; -4);

г) $y = -6x^2$, А(2; 14)?

4. Постройте график функции:

а) $y = 4x^2$;

б) $y = -x^2$;

в) $y = -\frac{1}{3}x^2$.

Ответьте, используя график, пересекают ли его прямые

$y = 2$, $y = -5$, $y = \frac{1}{4}$.

5. Ответьте, не пользуясь графиком, пересекают ли прямая $y = 4$ и прямая $y = -3$ график функции:

а) $y = \frac{1}{8}x^2$;

б) $y = 0,01x^2$;

в) $y = -250x^2$.

6. Двоечник Женя заполнил таблицу значений квадратичной функции вида $y = ax^2$ так:

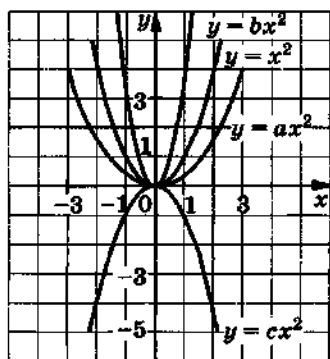
x	-2	-1	0	1
$y = f(x)$	6	1,5	0	2

Правильно ли он это сделал?

7. Заполните свободные клетки в таблице значений квадратичной функции вида $y = ax^2$:

x	-2	-1	0	1	2
$y = ax^2$		4			16

8. На рисунке 13 изображены графики квадратичных функций $y=ax^2$, $y=bx^2$, $y=cx^2$. Сравните числа a , b и c с нулем и единицей.



9. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

- а) $y=0,2x^2$;
 б) $y=-0,6x^2$;
 в) $y=5x^2$;
 г) $y=-12x^2$.

10. Найдите координаты точек пересечения графика данной функции с данной прямой:

Рис. 13

- а) $y=3x^2$ и $y=3$; в) $y=0,5x^2$ и $y=2$;
 б) $y=-5x^2$ и $y=-20$; г) $y=-\frac{1}{3}x^2$ и $y=-3$.

11. В одной системе координат постройте графики данных функций. Укажите координаты точек пересечения построенных графиков:

- а) $y=x^2$ и $y=2x$; в) $y=2x^2$ и $y=\frac{2}{x}$;
 б) $y=x^2$ и $y=5x-6$; г) $y=-\frac{1}{2}x^2$ и $y=-\frac{4}{x}$.

12. Не строя графики функций, найдите координаты точек их пересечения:

- а) $y=8x^2$ и $y=-2x$; в) $y=6x^2$ и $y=4x$;
 б) $y=0,1x^2$ и $y=11x-100$; г) $y=-\frac{1}{4}x^2$ и $y=2x$.

13. Постройте график функции:

- а) $y = \begin{cases} 3x^2 & \text{при } x \geq 0 \\ -2x^2 & \text{при } x < 0; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} -4x^2 & \text{при } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{при } x < 0. \end{cases}$
 б) $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{при } x \geq 0 \\ x^2 & \text{при } x < 0; \end{cases}$

Укажите промежутки возрастания и убывания функции.

14. Объясните, какие из следующих утверждений верны:
 а) множество значений всякой квадратичной функции вида $y = ax^2$ — промежуток $[0; +\infty)$;
 б) функция, множество значений которой — промежуток $[0; +\infty)$, является квадратичной функцией вида $y = ax^2$;
 в) ни у какой квадратичной функции вида $y = ax^2$ множеством значений не является промежуток $[0; +\infty)$.
15. Известно, что график квадратичной функции вида $y = ax^2$ проходит через точку $A(2; 5)$. Определите число a .
16. Дана квадратичная функция $f(x) = ax^2$. Известно, что уравнение вида $f(x) = b$ имеет решение при любом отрицательном значении b . Можете ли вы однозначно определить число a ? знак числа a ?
17. Постройте график функции:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = \begin{cases} 2x^2 & \text{при } x \geq 0 \\ x-1 & \text{при } x < 0; \end{cases} & \text{в) } y = \begin{cases} 3x^2 & \text{при } x \geq 1 \\ 2x & \text{при } x < 1; \end{cases} \\ \text{б) } y = \begin{cases} -3x^2 & \text{при } x \geq 0 \\ -4x+1 & \text{при } x < 0; \end{cases} & \text{г) } y = \begin{cases} -0,5x^2 & \text{при } x \leq -1 \\ x+1 & \text{при } x > -1. \end{cases} \end{array}$$

Для каждой из них укажите промежутки возрастания и убывания.

18. Постройте график функции:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geq 0 \\ -x+1 & \text{при } x < 0; \end{cases} & \text{в) } y = \begin{cases} 0,5x^2 & \text{при } x \geq 1 \\ -x+2 & \text{при } x < 1; \end{cases} \\ \text{б) } y = \begin{cases} -3x^2 & \text{при } x \geq 0 \\ x-1 & \text{при } x < 0; \end{cases} & \text{г) } y = \begin{cases} -x^2 & \text{при } x \geq 1 \\ x-1 & \text{при } x < 1. \end{cases} \end{array}$$

Для каждой из них установите, имеет ли она наибольшее значение; наименьшее значение.

19. Известно, что функция убывает на промежутке $(-\infty; 1]$ и возрастает на промежутке $[1; +\infty)$.
 а) Нарисуйте график какой-нибудь функции $y = f(x)$, удовлетворяющей этим условиям.
 б) Нарисуйте график функции $y = -f(x)$.
 в) Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = -f(x)$.
20. Рассматривается квадратичная функция вида $f(x) = ax^2$, где $a > 0$. Сравните значения:

- а) $f(3)$ и $f(0)$; в) $f(3,25)$ и $f(-3,25)$;
 б) $f(3,25)$ и $f(3,26)$; г) $f(3,25)$ и $f(-3,27)$.

О-10. Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль оси y

1. Найдите координаты вершины параболы, которая получена сдвигом вдоль оси y :
 - а) параболы $y = 3x^2$ на 2 единицы вниз;
 - б) параболы $y = -4x^2$ на 1 единицу вверх;
 - в) параболы $y = 0,5x^2$ на 4 единицы вверх;
 - г) параболы $y = -0,1x^2$ на 3 единицы вниз.
2. Изобразите схематически график функции и задайте эту функцию формулой, если известно, что ее график получен сдвигом вдоль оси y :
 - а) параболы $y = x^2$ на 3 единицы вниз;
 - б) параболы $y = -2x^2$ на 2 единицы вверх;
 - в) параболы $y = 0,5x^2$ на 3 единицы вниз;
 - г) параболы $y = -x^2$ на 4 единицы вверх.
3. Назовите координаты вершины параболы:
 - а) $y = 2x^2 + 4$; в) $y = 3x^2 - 2$;
 - б) $y = -4x^2 + 4$; г) $y = 5x^2 + 0,5$.
4. Постройте график функции:
 - а) $y = x^2 + 3$; в) $y = \frac{1}{3}x^2 - 3$;
 - б) $y = -2x^2 + 5$; г) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$.

Для каждой из этих функций найдите ее наибольшее (наименьшее) значение и промежутки возрастания и убывания.
5. Ответьте с помощью схематического рисунка, какие из следующих функций принимают только положительные значения; только отрицательные значения:
 - а) $y = 3x^2 + 6$; в) $y = 3x^2 - 2$;
 - б) $y = -4x^2 - 2$; г) $y = 0,01x^2 + 2$.
6. Найдите нули функции или покажите, что их нет:
 - а) $y = x^2 - 4$; в) $y = \frac{1}{5}x^2 - 5$;
 - б) $y = -2x^2 + 2$; г) $y = 4x^2 + 1$.

7. Постройте график функции $y = 3x^2 + 1$. Найдите множество значений этой функции. Приведите пример еще какой-либо квадратичной функции с таким же множеством значений.
8. Постройте график функции:
а) $y = \begin{cases} 2x^2 + 1 & \text{при } x > 0 \\ -x^2 & \text{при } x \leq 0; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} -2x^2 + 2 & \text{при } x > 1 \\ 4x^2 + 1 & \text{при } x \leq 1. \end{cases}$
б) $y = \begin{cases} 0,5x^2 - 1 & \text{при } x \geq 0 \\ -3x^2 + 1 & \text{при } x < 0; \end{cases}$
9. Постройте параболу $y = 2x^2 - 4$. Постройте параболу, симметричную ей относительно оси x , и задайте ее уравнением.
10. Парабола $y = 2x^2 + a$ проходит через точку $M(1; 5)$. Определите число a .

О-11. Сдвиг графика функции $y=ax^2$ вдоль оси x

1. Найдите координаты вершины параболы, полученной сдвигом вдоль оси x :
 - а) параболы $y = 3x^2$ на 2 единицы вправо;
 - б) параболы $y = -2x^2$ на 1 единицу влево;
 - в) параболы $y = \frac{1}{3}x^2$ на 4 единицы вправо;
 - г) параболы $y = -\frac{1}{5}x^2$ на 5 единиц влево.
2. Изобразите схематически график функции и задайте эту функцию формулой, если известно, что ее график получен сдвигом вдоль оси x :
 - а) параболы $y = 4x^2$ на 3 единицы вправо;
 - б) параболы $y = -x^2$ на 2 единицы влево;
 - в) параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ на 4 единицы вправо;
 - г) параболы $y = -\frac{1}{4}x^2$ на 6 единиц влево.
3. Назовите координаты вершины параболы:
 - а) $y = (x - 2)^2$;
 - б) $y = -3(x + 2)^2$;
 - в) $y = 4(x + 3)^2$;
 - г) $y = -5(x + 5)^2$.

4. Найдите нули функции:

а) $y = (x + 2)^2$;

в) $y = 2(x - 0,5)^2$;

б) $y = 6(x + 2)^2$;

г) $y = -3(x + 0,1)^2$.

Найдите оси симметрии графиков этих функций.

5. Постройте график функции:

а) $y = 0,5(x + 2)^2$;

в) $y = \frac{1}{4}(x - 4)^2$;

б) $y = -2(x - 3)^2$;

г) $y = -(x + 3)^2$.

Для каждой из этих функций укажите ее наибольшее (наименьшее) значение и промежутки возрастания и убывания.

6. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} 2(x + 1)^2 & \text{при } x > -1 \\ -3(x + 1)^2 & \text{при } x \leq -1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 3(x - 1)^2 & \text{при } x > 0 \\ -(x + 2)^2 & \text{при } x \leq 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} 4(x - 2)^2 & \text{при } x > 1 \\ -\frac{1}{2}(x + 1)^2 & \text{при } x \leq -1. \end{cases}$

7. Парабола $y = a(x - 2)^2$ проходит через точку $M(1; 3)$.
Определите число a .

О-12. Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат

1. Найдите координаты вершины параболы, полученной сдвигом графика данной квадратичной функции:

а) $y = 2x^2$ вправо вдоль оси x на 2 единицы и вверх вдоль оси y на 1 единицу;

б) $y = -3x^2$ влево вдоль оси x на 3 единицы и вниз вдоль оси y на 2 единицы;

в) $y = -0,5x^2$ вправо вдоль оси x на 1 единицу и вверх вдоль оси y на 4 единицы;

г) $y = 2x^2$ влево вдоль оси x на 5 единиц и вниз вдоль оси y на 3 единицы.

2. Изобразите схематически график функции и задайте эту функцию формулой, если известно, что ее график получен сдвигом:

а) параболы $y = -0,5x^2$ вправо вдоль оси x на 4 единицы и вниз вдоль оси y на 3 единицы;

б) параболы $y = 5x^2$ влево вдоль оси x на 2 единицы и вверх вдоль оси y на 4 единицы.

3. Назовите координаты вершины параболы:

а) $y = 3(x + 2)^2 - 1$; в) $y = 10(x - 0,2)^2 - 5$;

б) $y = -2(x - 4)^2 + 3$; г) $y = \frac{1}{3}(x - 2)^2 + 7$.

Найдите оси симметрии этих парабол.

4. Найдите нули функции или покажите, что их нет:

а) $y = 2x^2 - 5x + 3$; в) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$;

б) $y = -3x^2 + 2x$; г) $y = 3x^2 - 2x + 6$.

5. Постройте график функции:

а) $y = 4(x - 5)^2 - 2$; в) $y = (x - 0,5)^2 - 4$;

б) $y = -2(x + 6)^2 + 2$; г) $y = -\frac{1}{3}(x + 9)^2 - 1$.

Для каждой из этих функций укажите ее наибольшее (наименьшее) значение и промежутки возрастания и убывания.

6. Ответьте с помощью схематического рисунка, какие из следующих функций принимают только положительные значения; только отрицательные значения:

а) $y = 6(x - 5)^2 - 1$; в) $y = 2(x - 0,2)^2 + 11$;

б) $y = -4(x + 7)^2 - 3$; г) $y = -\frac{1}{5}(x + 2)^2 - 7$.

7. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 4x + 5$; в) $y = -2x^2 + 2x - 3$.

б) $y = -2x^2 + 6x$;

8. Постройте график функции $y = 3(x - 1)^2 + 5$. Укажите множество значений этой функции. Приведите пример еще какой-либо квадратичной функции с таким же множеством значений.

-
9. Множество значений функции $y = 3(x - 5)^2 + k$ — это луч $[-3; +\infty)$. Найдите число k .

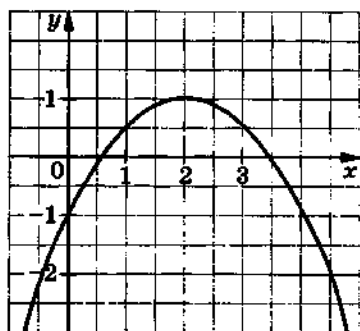


Рис. 14

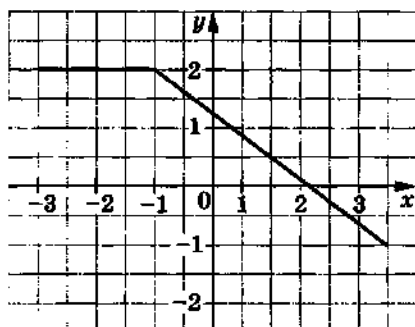


Рис. 15

10. Постройте график функции и определите множество ее значений:

а) $y = \begin{cases} 2(x-1)^2 + 2 & \text{при } x > 1 \\ -3(x+2)^2 - 1 & \text{при } x \leq 1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 0,5(x+1)^2 + 2 & \text{при } x \geq 0 \\ -(x-1)^2 - 1 & \text{при } x < 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} 0,5(x+3)^2 + 2 & \text{при } x > -1 \\ -2(x-1)^2 - 1 & \text{при } x \leq -1. \end{cases}$

11. На рисунке 14 изображен график функции $y = a(x-d)^2 + k$. Определите знаки чисел a , d и k .

12. На рисунке 15 изображен график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:

а) $y = f(x) + 1$; б) $y = f(x - 1)$; в) $y = f(x + 1) - 1$.

О-13. График функции $y = ax^2 + bx + c$

График функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) — парабола, координаты вершины которой $\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

Если $a > 0$, то ветви параболы идут вверх; если $a < 0$, то вниз.

1. Вычислите координаты вершины параболы:

а) $y = 2x^2 - 4x + 7$;

в) $y = -0,1x^2 - 3x$;

б) $y = -4x^2 + 6x - 3$;

г) $y = \frac{1}{3}x^2 - 5x + 2$.

2. Укажите направление ветвей и ось симметрии параболы:
- а) $y = -2x^2 + 3x - 2$; в) $y = -0,2x^2 - 0,4x + 1$;
 б) $y = 6x^2 + 5x - 2$; г) $y = -\frac{1}{4}x^2 - 7x + 1$.
3. На рисунке 16, а — д изображены графики функций вида $f(x) = ax^2 + bx + c$. Определите в каждом случае, при каких значениях x выполняется неравенство $f(x) > 0$; $f(x) < 0$.

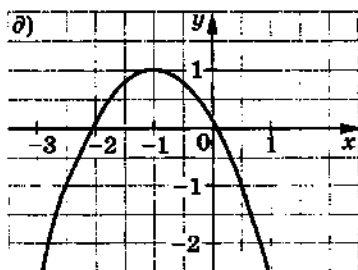
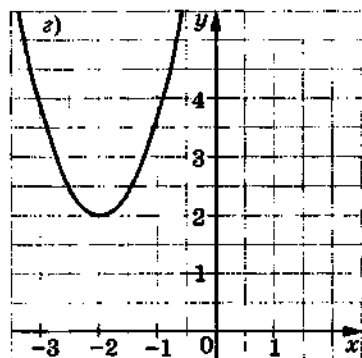
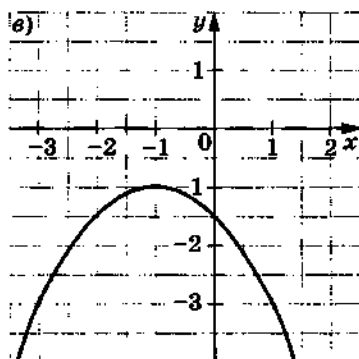
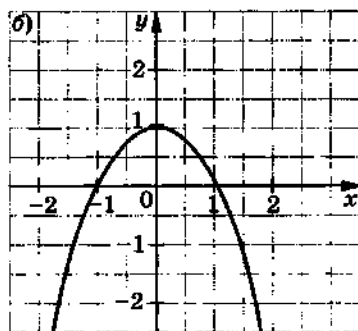
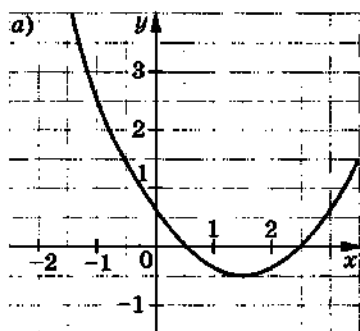


Рис. 16

4. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 8x + 12$;

д) $y = 2x^2 - 8x + 8$;

б) $y = 2x^2 - 7x + 5$;

е) $y = -3x^2 - 6x - 3$;

в) $y = -3x^2 + 6x + 9$;

ж) $y = -2x^2 - 6x - 5$;

г) $y = -0,5x^2 - 2x - 2$;

з) $y = 4x^2 - x + 1$.

В каждом случае укажите значения x , при которых функция: 1) убывает; 2) возрастает; 3) принимает значения, равные 0; большие 0; меньшие 0 (по графику).

5. Постройте схематически график функции:

а) $y = x^2 - 8x + 5$;

г) $y = -5x^2 - 3x - 2$;

б) $y = 2x^2 - 6x + 1$;

д) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 4$;

в) $y = -0,5x^2 - 4x$;

е) $y = -x^2 + 4x - 1$.

В каждом случае определите наименьшее или наибольшее значение функции.

6. Определите нули функции, не строя ее график:

а) $y = -2x^2 - 4x$;

в) $y = 6x^2 - 5x + 1$;

б) $y = 4x^2 - 3x - 1$;

г) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 12$.

7. Для каждой из функций:

а) $y = 2x^2 - 3x + 11$;

в) $y = -0,5x^2 - 4x + 1$;

б) $y = -3x^2 + 2x + 2$;

г) $y = \frac{3}{5}x^2 - 6x + 1$

установите: 1) пересекает ли ее график ось абсцисс; 2) в какой точке график функции пересекает ось ординат.

8. График какой из следующих функций проходит через начало координат:

а) $y = 6x^2 - 2x + 1$;

в) $y = -0,5x^2 + 1$;

б) $y = -5x^2 + x$;

г) $y = \frac{7}{9}x^2 - 5x$?

9. Постройте схематически график функции, найдите область ее значений:

а) $y = x^2 - 2x + 2$;

в) $y = -0,5x^2 + x + 1$;

б) $y = -x^2 + 2x$;

г) $y = \frac{2}{5}x^2 - 2x + 5$.

10. Постройте на одном рисунке графики следующих функций:

а) $y = x^2 - 3x$ и $y = 2x - 6$;

б) $y = -2x^2 - 4x + 1$ и $y = 3x - 8$;

в) $y = -x^2 - 6x + 9$ и $y = -2x^2 + x - 3$;

г) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ и $y = x^2 - 4x$.

Найдите координаты точек пересечения построенных графиков. Проверьте результат подстановкой в формулы.

11. Не строя графики функций, найдите координаты точек их пересечения:

а) $y = x^2 - 7x$ и $y = -3x + 21$;

б) $y = -0,5x^2 - 2x - 3$ и $y = x + 18$;

в) $y = x^2 + 4x - 7$ и $y = 2x^2 - 7x + 23$;

г) $y = \frac{1}{2}x^2 - x$ и $y = x^2 + x$.

12. Постройте график функции:

а) $y = 2(x-1)(x+3)$;

б) $y = 0,5(x-1)(x-2)$;

в) $y = -0,5x(x+4)$.

13. Постройте график данной функции на указанном промежутке. Определите область значений функции:

а) $y = 2x^2 - 2x + 1$ на $[-2; 2]$;

б) $y = -2x^2 + 4x$ на $[-1; 3]$;

в) $y = 0,5x^2 - x + 2$ на $[-2; +\infty)$;

г) $y = -0,5x^2 + 2x$ на $(-\infty; 2]$.

14. Постройте график функции, симметричный графику функции $y = 2x^2 + 2x + 1$ относительно оси Oy . Запишите уравнение функции, график которой вы построили.

15. Заданная парабола проходит через точку M . Найдите неизвестный коэффициент в уравнении параболы, если:

а) $y = x^2 + 4x + c$, $M(0; 2)$;

б) $y = ax^2 + 2x - 1$, $M(1; 1)$;

в) $y = -0,5x^2 + bx + 2$, $M(-1; 2)$.

16. Постройте график функции и укажите область ее значений:

а) $y = \begin{cases} 2x^2 - 4 & \text{при } x > 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 + x - 1 & \text{при } x \leq 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{при } x > 1 \\ -3x^2 + 3x & \text{при } x \leq 1; \end{cases}$

$$в) y = \begin{cases} 0,5x^2 - x & \text{при } x < 0 \\ -x^2 - 1 & \text{при } x \geq 0; \end{cases}$$

$$г) y = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{при } x > 0 \\ -x^2 + 4x & \text{при } x \leq 0; \end{cases}$$

$$д) y = \begin{cases} -x^2 - 2x - 1 & \text{при } x > 1 \\ x^2 + 2x + 6 & \text{при } x \leq 1. \end{cases}$$

17. Сторона AD прямоугольника на 2 см больше его стороны AB . Запишите формулу, выражающую зависимость площади этого прямоугольника от длины x стороны AB . Постройте график рассматриваемой функции. Какова область определения и область значений этой функции?
18. Число 10 представьте в виде суммы двух чисел a и b . Запишите формулу, выражающую зависимость произведения этих чисел от числа a . Постройте график рассматриваемой функции. Какое наибольшее значение может принимать рассматриваемое произведение? Можете ли вы указать наименьшее значение этого произведения? Сможете ли вы это сделать, если рассматривать только неотрицательные числа a и b ?
19. На рисунке 17 изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Определите знак числа a ; число c ; знак числа $-\frac{b}{2a}$ (абсциссы вершины параболы); знак числа b .
20. а) Функция $y = x^2 - ax + 3$ возрастает на промежутке $[3; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 3]$. Найдите число a .
- б) Функция $y = ax^2 - 4x + 3$ возрастает на промежутке $[2; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 2]$. Найдите число a .
- в) Можете ли вы найти такое число a , что функция $y = ax^2 - 2x + 1$ возрастает на промежутке $[-1; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; -1]$?

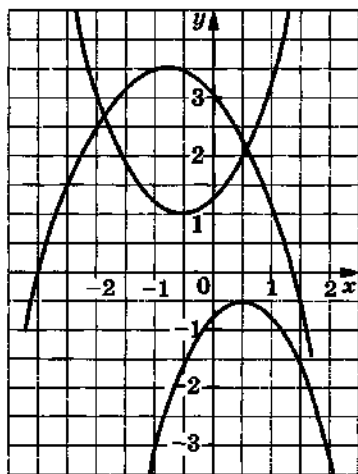


Рис. 17

21. Графики функций:

- а) $y = x^2 - 2x + 4$ и $y = ax$;
б) $y = x^2 - 6x + c$ и $y = 2x + 1$;
в) $y = x^2 - bx + 1$ и $y = x - 2$

имеют ровно одну общую точку. Найдите неизвестный коэффициент.

22*. Для каждой из заданных функций указано множество ее значений. Найдите коэффициент c :

- а) $y = 2x^2 + 2x + c$, $[1; +\infty)$; б) $y = -3x^2 + 6x - c$, $(-\infty; 2]$.

23*. Рассматривается функция $y = x^2 + 2x + q$. Известно, что уравнение $x^2 + 2x + q = b$ имеет решение при любых $b \geq 1$ и только при таких b . Найдите число q .

О-14. Квадратные неравенства

Пример.

Решить неравенство:

- а) $x^2 - 5x + 6 < 0$; б) $-x^2 + 2x - 5 < 0$.

Решение.

а) Решим уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$. Его корни $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Схематично нарисуем параболу $y = x^2 - 5x + 6$ (рис. 18). Отметим значения x , при которых график лежит ниже оси x .

Ответ. (2; 3).

б) Решим уравнение $-x^2 + 2x - 5 = 0$. У него нет корней. Схематично нарисуем параболу $y = -x^2 + 2x - 5$ (рис. 19). Весь график лежит ниже оси x .

Ответ. $(-\infty; +\infty)$.

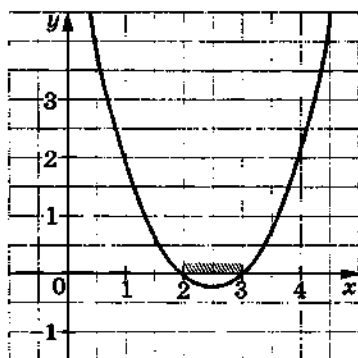


Рис. 18

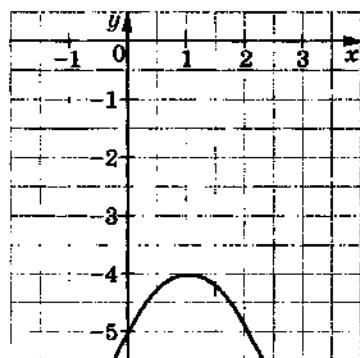


Рис. 19

1. Какие из неравенств являются квадратными:

а) $x^2 - 7x + 3 > 0$;

г) $2x^2 - 6x < 0$;

б) $x^2 - \frac{1}{x} > 0$;

д) $\frac{1}{x^2 - 4x} < 0$;

в) $x^2 - x^3 + 3 < 0$;

е) $0,5x^2 - 6x - 2 < 0$?

2. На рисунке 20, а — в изображены графики квадратичных функций $f(x) = ax^2 + bx + c$. Укажите значения x , при которых выполняется неравенство $f(x) > 0$.

3. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции с осью абсцисс:

а) $y = x^2 - 4x - 32$;

в) $y = 0,5x^2 - 3x$;

б) $y = -2x^2 + 7x - 5$;

г) $y = -6x^2 - 5x + 1$.

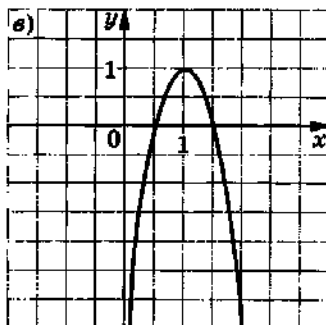
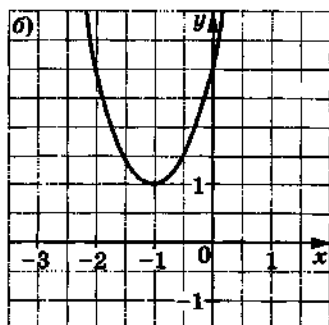
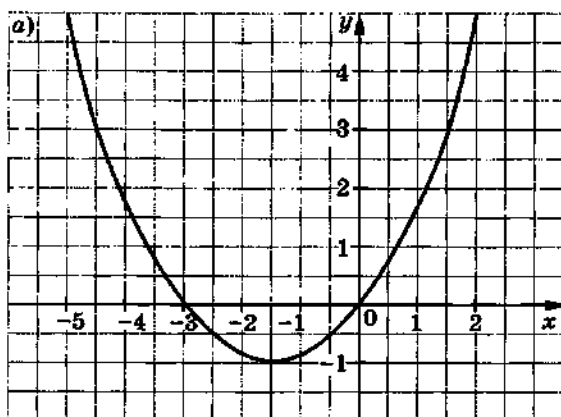


Рис. 20

4. Постройте график функции и отметьте те значения x , при которых $f(x) < 0$:
- а) $f(x) = x^2 - 7x + 12$; в) $f(x) = 4x^2 - 6x$;
б) $f(x) = -3x^2 - 2x + 5$; г) $f(x) = -0,5x^2 - x - 10$.

5. Даны корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a > 0$. Вставьте вместо многоточия знак $>$ или $<$:
- а) $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, на промежутке $(3; 5)$ выполняется неравенство $f(x) \dots 0$;
б) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, на промежутке $(2; +\infty)$ выполняется неравенство $f(x) \dots 0$;
в) $x_1 = 4$, $x_2 = 7$, на промежутке $(-\infty; 4)$ выполняется неравенство $f(x) \dots 0$.

6. Даны корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a < 0$. Вставьте вместо многоточия знак $>$ или $<$:
- а) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, на промежутке $(-1; 0)$ выполняется неравенство $f(x) \dots 0$;
б) $x_1 = -5$, $x_2 = 4$, на промежутке $(4; +\infty)$ выполняется неравенство $f(x) \dots 0$;
в) $x_1 = 3$, $x_2 = 8$, на промежутке $(-\infty; 3)$ выполняется неравенство $f(x) \dots 0$.

7. Двоечник Женя решал квадратные неравенства. У него получились следующие ответы:
- а) $x < \pm 2$; в) $x > \pm 3$;
б) $-2 < x < 2$; г) $x > 3$ и $x < -3$.

Как вы считаете, могли ли получиться такие ответы? Если да, то придумайте неравенства, имеющие такие решения; если нет, объясните, почему вы так считаете.

8. Закончите фразу:
- а) Наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + bx + c$ равно 3. Неравенство $f(x) > 0$ выполняется при ...
б) Наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + bx + c$ равно 0. Неравенство $f(x) \geq 0$ выполняется при ...
в) Наибольшее значение функции $f(x) = -x^2 + bx + c$ равно -2 . Неравенство $f(x) < 0$ выполняется при ...

Решите неравенство (9 – 13):

9. а) $x^2 - 5x + 4 > 0$; г) $0,5x^2 - 3x + 4 > 0$;
б) $2x^2 - 6 < 0$; д) $x^2 - 16 < 0$;
в) $x^2 - 4 > 0$; е) $3x^2 - 6x - 9 < 0$.

10. а) $25 - x^2 > 0$; г) $7 - 6x - x^2 > 0$;
 б) $81 - x^2 < 0$; д) $6 - 4x - 0,5x^2 < 0$;
 в) $5x - 2x^2 > 0$; е) $9x - 3x^2 < 0$.
11. а) $2x^2 - 4x + 2 \geq 0$; г) $-x^2 + 18x - 81 \geq 0$;
 б) $-0,5x^2 - 2x - 2 \leq 0$; д) $2x^2 - 20x + 50 > 0$;
 в) $4x^2 - 16x + 16 \leq 0$; е) $-2x^2 + 12x - 18 < 0$.
12. а) $2x^2 - 4x + 5 > 0$; г) $3x^2 + 5 > 0$;
 б) $x^2 - 2x + 7 < 0$; д) $-0,5x^2 - 7 < 0$;
 в) $-2x^2 - 2x - 10 \leq 0$; е) $2x^2 + 6 \leq 0$.
13. а) $2x^2 < 18$; в) $0,5x^2 > 2$; д) $x^2 \leq 3x + 4$;
 б) $3x^2 > 6x$; г) $-0,5x^2 \leq x$; е) $x^2 \geq 9x - 18$.
-

Решите неравенство (14 - 18):

14. а) $3x^2 - 2x < 1$; в) $5x^2 + 4x - 2 > -1$;
 б) $0,5x^2 > 2x - 1,5$; г) $2x - 4x^2 + 5 < -3 - 2x$.
15. а) $(x - 3)(x + 5) < 0$; г) $(0,5x - 1)(x + 2) > 0$;
 б) $(x - 6)(x + 2) > 0$; д) $(3 - x)(x - 5) < 0$;
 в) $(2x - 3)(3x + 5) \leq 0$; е) $(4 - 2x)(x - 2) \geq 0$.
16. а) $x(x - 8) \geq -7$; в) $3x^2 - x - 2 > 3x + 2$;
 б) $x(2x - 3) < 2$; г) $-0,5x^2 - 4x \leq 3x + 6,5$.
17. а) $2(x - 3) > x^2 - 9$; в) $3(x + 4) \leq 16 - x^2$;
 б) $4x(x + 7) < x^2 - 49$; г) $-5x(2 - x) \geq 4 - x^2$.
18. а) $\frac{21}{(x - 2)(x + 3)} > 0$; в) $\frac{-1}{(x + 2)(x - 7)} \geq 0$;
 б) $\frac{10}{(4 - 2x)(x + 2)} \leq 0$; г) $\frac{3}{(1 - 0,5x)(2x - 7)} > 0$.

19. Найдите все целые решения неравенства:

- а) $5x - x^2 > 0$; б) $2x^2 + 6x - 8 \leq 0$; в) $2 - 0,5x^2 \geq 0$.

20. Найдите все отрицательные решения неравенства:

- а) $4x - 2x^2 < 0$; б) $3x^2 + x - 4 \leq 0$; в) $0,5x^2 - 8 \geq 0$.

21. Найдите все решения неравенства, принадлежащие промежутку $[1; 5]$:

а) $x^2 + 3x + 2 < 0$; б) $2x^2 - 3x \geq 0$; в) $0,5x^2 - 2 > 0$.

22. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 11x + 10 > 0 \\ x - 3 > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 8 - 2x^2 \leq 0 \\ x^2 - x - 2 > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x^2 - 9x + 4 > 0 \\ 2x + 3 \geq 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + 8x - 9 \geq 0 \\ 3x - x^2 \geq 0. \end{cases}$

23. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

а) $\sqrt{2x^2 - 6x}$; в) $\sqrt{18 - 2x^2}$;

б) $\sqrt{x^2 - 6x - 40}$; г) $\sqrt{10x - x^2 - 16}$.

24. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x - 1}$; в) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}{6 - x}$;

б) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x - 7}$; г) $y = \frac{\sqrt{10x - x^2 - 9}}{3 - x}$.

25. Найдите все значения a , такие, что данное уравнение не имеет решений:

а) $x^2 - 2(a + 1)x + 3a + 1 = 0$;

б) $x^2 - 2(a + 3)x - a + 9 = 0$;

в) $x^2 - 4(a + 3)x + 4a + 12 = 0$.

26. Найдите все значения b , такие, что уравнение имеет два решения:

а) $x^2 - 2bx + 9 = 0$;

б) $x^2 - 2(b + 2)x + 2b + 4 = 0$;

в) $x^2 - (b + 3)x + 3b + 1 = 0$.

27. Дано квадратное неравенство $ax^2 + bx + c \leq 0$, если известно, что можно найти числовой луч, на котором оно выполняется. Определите знак числа a .

28. Известно, что множество решений квадратного неравенства $ax^2 + bx + c \leq 0$ — отрезок. Определите знак числа a .
29. Найдите все значения a , такие, что при всех значениях x выполняется неравенство:
 а) $x^2 - 2ax + 4 > 0$;
 б) $-x^2 + 4ax - 16 < 0$.
30. Множество решений неравенства $(x - a)(x - 2) \leq 0$ — это отрезок $[2; 5]$. Определите число a .
- 31*. Неравенству $(x - 1)(x - a) < 0$, где a — целое число, удовлетворяет ровно 3 целых числа. Найдите число a .
- 32*. Множество решений неравенства $(x - 3a)(x - 2a) \leq 0$ — отрезок длины 5. Определите число a .

• Проверь себя!

1. Осью симметрии графика квадратичной функции $y = f(x)$ является прямая $x = 0$; $f(3) = 2$. Какое из данных равенств справедливо?
 А. $f(-3) = 2$. Б. $f(2) = 3$. В. $f(-3) = -2$.
2. График параболы $y = 7x^2 + 3x - 2$ пересекает ось Oy в точке, лежащей:
 А. Выше оси абсцисс.
 Б. На оси абсцисс.
 В. Ниже оси абсцисс.
3. У параболы $y = 0,5x^2$:
 А. Ветви направлены вверх.
 Б. Одна ветвь направлена вверх, а другая — вниз.
 В. Ветви направлены вниз.
4. График функции $y = 2(x - 1)^2$ можно получить из графика функции $y = 2x^2$ сдвигом:
 А. На одну единицу вправо вдоль оси Ox .
 Б. На одну единицу влево вдоль оси Ox .
 В. На одну единицу вниз вдоль оси Oy .
5. Квадратичных функций, графики которых не пересекают ось абсцисс:
 А. Не существует.
 Б. Существует только одна.
 В. Существует бесконечно много.

6. Какое из данных утверждений о квадратичной функции справедливо?
 А. Каждое свое значение функция принимает в двух точках.
 Б. Нет значения, которое бы функция принимала при трех различных значениях аргумента.
 В. Функция принимает все действительные значения.
7. Функция $y = 10x^2 - 4x + 3$:
 А. Возрастает на промежутке $(-\infty; 0,2]$, убывает на промежутке $[0,2; +\infty)$.
 Б. Убывает на промежутке $(-\infty; 0,2]$, возрастает на промежутке $[0,2; +\infty)$.
 В. Убывает на промежутке $(-\infty; -0,2]$, возрастает на промежутке $[0,2; +\infty)$.
8. Наибольшее значение функции $y = -x^2 + 4x - 1$:
 А. Равно -1 . Б. Равно 3 . В. Не существует.
9. Множество решений неравенства $2x^2 - 2x - 5 > 0$ — это:
 А. Вся числовая ось.
 Б. Числовой интервал.
 В. Объединение двух непересекающихся числовых лучей.
10. Таких чисел a , что неравенство $x^2 - 2ax - 16 > 0$ выполняется при всех действительных x :
 А. Нет. Б. Бесконечно много. В. Ровно одно.

А В А А В В Б В А

Глава 3. Уравнения и системы уравнений

О-15. Рациональные выражения

1. Заполните таблицу:

а)

a	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	4	100
$a^2 - 4$								

б)

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{3}$	1	2	100
$\frac{3x-2}{x}$								

в)

y	-3	-2	-1	0	1	2	3	100
$\frac{1}{y^2-3y+2}$								

2. Найдите значение выражения при данных значениях переменных (в том случае, если оно имеет смысл):

1) $x^2 - y^2$:

а) при $x=11$, $y=9$;

в) при $x=9,3$, $y=10,7$;

б) при $x=0$, $y=-3$;

г) при $x=1,2$, $y=0$;

2) $\frac{-2a^2}{a-b}$:

а) при $a=-3$, $b=2$;

в) при $a=-2,5$, $b=3,5$;

б) при $a=0$, $b=-8$;

г) при $a=3,24$, $b=3,24$;

3) $\frac{xy-8}{(2x+3)(y+2)}$:

а) при $x=2$, $y=4$;

в) при $x=0,2$, $y=-3$;

б) при $x=-1,5$, $y=2$;

г) при $x=\frac{3}{4}$, $y=-2$.

3. Найдите область определения выражения:

1) а) $3a^3 - 2$;

2) а) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x+3}$;

б) $2a^{-1} + 1$;

б) $\frac{2}{x^2+9}$;

в) $\frac{2a}{a-2}$;

в) $\frac{5}{4-x} + \frac{6}{x-6}$;

г) $\frac{a-3}{4-3a-a^2}$;

г) $2(x-1)^{-1} - 3(x-2)^{-1}$.

4. Впишите вместо многоточия такие одночлены, чтобы получилось тождество:

1) а) $(2a + \dots)^2 = \dots + \dots + 25b^2$;

б) $(\dots - 3m)^2 = 49b^2 - \dots + \dots$;

в) $(2a + \dots)(\dots - 3b) = 4a^2 - 9b^2$;

г) $(x - \dots)(x - \dots) = x^2 - 5x + 6$;

- 2) а) $(a - \dots)^2 = (b - \dots)^2$;
 б) $(x + \dots)(\dots - \dots + \dots) = x^3 + 8$;
 в) $(3 \cdot \dots)^2 = 9a^4x^8$;
 г) $\frac{\dots}{2a^3b^2} = 3a^3b^2$.

5. Упростите выражение:

- 1) а) $(3a - 5c)^2 + (2a + 9c)^2 - (2a + 3c)(27c - 16a)$;
 б) $(3m - 2n)(3m + 2n) + (m - 3n)^2 - (5m - n)(2m - 5n)$;
 в) $\left(\frac{2}{b-a} - \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{a^2 + b^2}{a+b} - a\right)$;
 г) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} - \frac{2x^2 - 5x + 2}{x-2}$;
 2) а) $\left(\frac{2}{3}a^{-2}b^2\right)^{-1} \cdot (-2a^3b^{-3})^2$;
 б) $\frac{(3a^2b^{-3})^4 \cdot (2a^{-5}b^2)}{27a^3b^{-11}}$;
 в) $\left(a + \frac{1}{a^2}\right) : \left(\frac{a^2+1}{a^2} - \frac{1}{a}\right)$;
 г) $\left(\frac{a+1}{a^2-2a-3} - \frac{a-2}{2a^2-5a+2}\right) \cdot (2a^2 - 7a + 3)$.

6. Докажите тождество:

- а) $-1 : \left(\frac{a+2}{4-2a} + \frac{2-a}{4+2a}\right) = \frac{a^2-4}{a^2+4}$;
 б) $\frac{m+n}{m-n} : \left(\left(1 - \frac{m}{m-n}\right) : \left(1 - \frac{n}{m+n}\right)\right) = -\frac{m}{n}$;
 в) $(a^2 - 4)(a - 2)^{-1} - (a^2 - 6a + 9)(a - 3)^{-1} = 5$;
 г) $\frac{(5-x)^2}{2x} \cdot \left(\frac{x}{x^2-25} - \frac{x}{(x-5)^2}\right) + \frac{5}{5+x} = 0$.

7. Найдите значение выражения:

- а) $(x^2 - x - 2)(x + 1)^{-1} + (3x^2 - 2x - 1)(x - 1)^{-1}$ при $x = 1\frac{3}{4}$;
 б) $\left(\frac{ac}{4a^2 + 4ac + c^2} - \frac{a}{2a+c}\right)(2 + a^{-1}c)^2 + 5c$ при $a = 0,73$, $c = 0,2$.

8. Найдите область определения выражения:

1) а) $\frac{3}{x^4 - 16}$;

2) а) $\frac{x-2}{x^2-4} - \frac{x+2}{x^2-9}$;

б) $\frac{x+1}{x^3-x}$;

б) 1: $\frac{x-5}{x+2}$;

в) $\frac{a-7}{a^4-3a^2+2}$;

в) $\frac{1}{x^2+9} : \frac{1}{x^3+9x}$.

9. Упростите выражение:

а) $(1+a^{-1}+a^{-2})(a^2-a)+a^{-1}$;

б) $\frac{a^2+2a-b^2-2b}{b^{-1}+a^{-1}+2a^{-1}b^{-1}}$;

в) $\frac{\frac{1}{a-b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{a-b} - \frac{1}{c}} : \left(1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) \cdot (a-b-c)^2$;

г) $\frac{a+2}{a^3-3a^2-4a+12} - \frac{3-a}{a^2-5a+6}$.

10. Докажите, что при всех значениях p значение выражения $(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)+1$ является неотрицательным числом. (Указание. Перемножьте первый двучлен с последним, второй — с третьим и затем воспользуйтесь удобной подстановкой.)

11. Докажите, что при $p > 1$ значение выражения

$$\frac{1}{1-p} + \frac{1}{1+p} + \frac{2}{1+p^2} + \frac{4}{1+p^4} + \frac{8}{1+p^8}$$

является отрицательным числом.

12. Докажите тождество:

а) $\left(\frac{a-b}{a^2+2ab+b^2} - \frac{2a}{a^2-b^2} + \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}\right) : \frac{8ab^2}{a^4-b^4} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$;

б) $\left(\frac{(a^2-b^2)^2 + (2ab)^2}{a^4-b^4} - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right) : \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{1}{a^2-b^2}$;

в) $\left(\left(\frac{a-c}{a}\right)^{-1} - \left(\frac{a+c}{c}\right)^{-1}\right)^{-1} \cdot \frac{a^2+c^2}{ac+c^2} = \frac{a}{c} - 1$;

г) $\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)^{-1} \cdot \frac{x^{-2}+y^{-2}}{x-y} - \frac{1}{xy} = \frac{2}{(x-y)^2}$.

13. Постройте график функции:

1) а) $y = (x-2)^2(x-2)^{-1}$; 2) а) $y = (x-1)^2 + (x+1)^2$;

б) $y = \frac{4x-x^2}{x-4}$; б) $y = \frac{(x-1)^2 - (x+1)^2}{x}$;

в) $y = \frac{x^3-8}{x^2+2x+4}$; в) $y = x + |x|$;

г) $y = \frac{|x|}{x}$; г) $y = \frac{x-|x|}{x}$.

♦ Проверь себя!

1. Найдите значение выражения $6ab + 15a$ при $a = -0,728$, $b = -2,5$.

А. $-1,728$.

Б. 0.

В. $1,824$.

2. При каком из данных значений p значение выражения $\frac{3p^2-2p-1}{p+2}$ равно 0?

А. -2 .

Б. -1 .

В. $-\frac{1}{3}$.

3. Упростите выражение $\frac{a^2-10a+25}{5-a} + a$.

А. $2a-5$.

Б. 5.

В. $2a+5$.

4. Найдите область определения выражения $\frac{x^2-2x}{x^2-4}$.

А. $x \neq \pm 2$.

Б. $x \neq 2$.

В. $x \neq 0$, $x \neq \pm 2$.

5. При всех значениях m из области определения выражения $m\left(\frac{3}{m+3}-1\right) : \left(\frac{3-m}{m+3} \cdot \left(1-\frac{m}{m-3}\right)\right)$ значение данного выражения:

А. Неотрицательно.

Б. Неположительно.

В. Бывает и положительным, и отрицательным, и нулем.

❁ — Б В Б А Б

О-16. Целые уравнения

1. Решите уравнение:

а) $2x - 9 = 3x + 16$;

в) $\frac{x^2 - 8}{4} - x = \frac{x + 1}{3} - 4$;

б) $\frac{t - 2}{4} = \frac{5 - 2t}{-4}$;

г) $(2x - 1)(x + 2) - \frac{x}{2} = -2$.

2. Решите уравнение и выпишите те его корни, которые удовлетворяют данному условию:

а) $x^2 - 2x - 7 = 0$, $x \leq 3$;

б) $(x - 1)(x + 4)(x^2 - 5) = 0$, $x \geq -\sqrt{3}$;

в) $\frac{x^2 - 1}{16} = \frac{x}{6}$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

3. Найдите все общие корни уравнений или докажите, что их нет:

а) $2x(3x^2 - 5) = (3x - 1)(2x^2 - 5) + 2$ и $(2x + 7)(x - 8) = 0$;

б) $\frac{(x - 1)^2}{3} - \frac{2x + 7}{5} = x - 4$ и $x^3 - 16x = 0$;

в) $(x^2 - 4x + 4)(49x^2 + 14x + 1) = 0$ и $7x^2 + 13x - 2 = 0$;

г) $x^3 + 4x = 0$ и $(1 - x)(1 + x) = 2x + 1$.

4. Составьте уравнение, корнями которого являются числа:

1) а) 4;

2) а) 2,5;

б) 4 и 2;

б) 2,5 и 0;

в) 4; 2 и 1;

в) 2,5; 0 и -3;

г) 4; 2; 1 и -1;

г) 2,5; 0; -3 и 7.

5. Решите уравнение и запишите корни в порядке их возрастания:

а) $(x^2 - 2)(x^2 - 7) = 0$;

б) $(x^2 - 3)(x^2 + 2x - 3) = 0$;

в) $x(x^2 - 4) = 5x$;

г) $(x - 2)(x^2 + x) = (x - 2)(x - 9)$.

6. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2}{2} = \sqrt{3}x - 1$;

в) $\frac{x^3}{5} - 5 = x(1 - x)$;

б) $\frac{3}{8}x^4 = 6x^2$;

г) $2x(x^2 - 4) = x + 2$.

7. Решите уравнение и выпишите корни, удовлетворяющие данному условию:

а) $(x^2 - x)^2 - 4(x^2 - x) - 12 = 0$, $|x| < 2,5$;

б) $x^3 + 4x^2 - 6x = 0$, $x \in [-1; 3]$;

в) $x^3 + \sqrt{7}x^2 - 4x - 4\sqrt{7} = 0$, $-5 \leq -2x \leq 8$;

г) $4x(x^2 - 9) = -5(x + 3)$, $-1 \leq \frac{x}{3} \leq \frac{1}{3}$.

8. На рисунке 21, а—в изображен график уравнения:

1) $y = x^3 + x^2 - 2x - 2$;

2) $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$;

3) $y = -x^4 + x^2 + 2$.

Соотнесите каждый график с уравнением и определите координаты точек пересечения графика с осями координат.

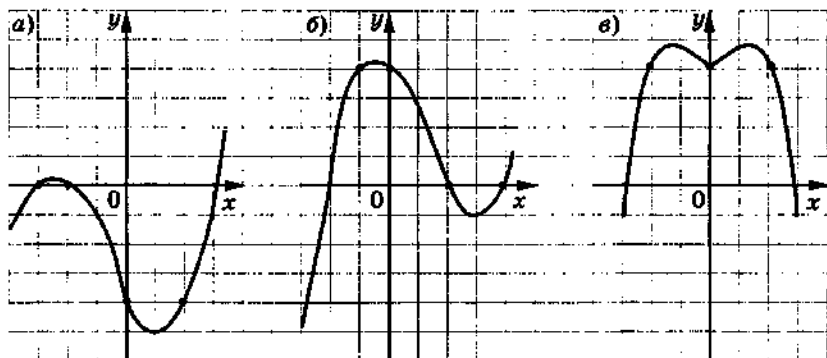


Рис. 21

О-17. Дробные уравнения

1. Решите уравнение:

1) а) $\frac{2x}{3-x} + \frac{6}{x-3} = x - 4$;

в) $\frac{5}{2t-1} - 10 = \frac{2t-7}{t}$;

б) $\frac{3x}{2-x} - \frac{5}{x-2} = 7$;

г) $\frac{3x^2 - 2x - 1}{x-1} = 0$;

$$д) \frac{x^2 - x}{x + 2} = \frac{2}{x + 2};$$

$$ж) \frac{t + 28}{t^2 - 16} = \frac{t + 1}{t + 4};$$

$$е) \frac{7x + 1}{x - 5} = \frac{1 - 4x}{x - 2};$$

$$з) \frac{13}{2x^2 + x - 21} + \frac{1}{2x + 7} = \frac{6}{x^2 - 9};$$

$$2) а) \frac{x^2}{x - 2} + \frac{2x}{2 - x} = 5;$$

$$д) \frac{x^2 + 4x}{x - 2} = \frac{5}{x - 2};$$

$$б) \frac{x^2}{x - 1} - \frac{3x}{1 - x} = 3x + 4;$$

$$е) \frac{2x - 5}{x - 2} = \frac{11 - 3x}{x - 1};$$

$$в) \frac{t - 3}{t} - 1 = \frac{t + 5}{t - 3};$$

$$ж) \frac{15 - y}{5y - y^2} = \frac{y - 3}{5 - y};$$

$$г) \frac{5x^2 + 2x - 24}{x - 5} = 0;$$

$$з) \frac{6}{t^2 + 6t} - \frac{1}{2t + 13} = \frac{13}{2t^2 + 13t}.$$

2. Существуют ли такие значения z , при которых разность алгебраических дробей $\frac{3z - 7}{z - 1}$ и $\frac{z + 1}{z - 3}$ равна 2?
3. Существуют ли такие значения y , при которых сумма алгебраических дробей $\frac{2y - 1}{y + 5}$ и $\frac{6y + 2}{3y - 18}$ равна их произведению?

Решите уравнение (4—5):

$$4. а) \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6};$$

$$б) \frac{y - 1}{y + 2} - \frac{y - 2}{y + 3} = \frac{y - 4}{y + 5} - \frac{y - 5}{y + 6};$$

$$в) \frac{z + 5}{z^2 - 5z} - \frac{z + 25}{2z^2 - 50} = \frac{z - 5}{2z^2 + 10z};$$

$$г) \frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10 \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right).$$

$$5. а) (2x^2 - 7)(x + 1) = -5x(x + 1);$$

$$б) \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^2 - 3x + 2} = 0;$$

$$в) \frac{x^2 + 4}{x - 1} = \frac{5x}{x - 1};$$

$$г) \frac{x - 2}{x^2 - 6} = \frac{x - 2}{x}.$$

О-18. Решение задач

1. Две машинистки, начав и закончив работу одновременно, вместе перепечатали рукопись объемом 182 страницы. Одна перепечатала 98 страниц, печатая в час на две страницы больше, чем другая. С какой скоростью печатала каждая машинистка?
 2. Мастер и ученик изготавливали детали. Сначала мастер изготовил 120 деталей, а потом ученик — 40 деталей. На изготовление всех деталей ушло 8 ч. Сколько часов работал мастер и сколько ученик, если производительность мастера выше производительности ученика на 20 деталей в час?
 3. В 8 ч утра экскурсанты отправились вниз по течению реки и, проплыв 35 км, сделали остановку на 3,5 ч, а затем вернулись обратно. Возвратились они в 17 ч 30 мин. Сколько времени плыли экскурсанты до места отдыха, если скорость течения реки 2 км/ч?
 4. Отдыхающие отправились на лодках по реке, скорость которой 2 км/ч, и, проплыв по течению 12 км, повернули назад. С какой скоростью отдыхающие плыли туда и обратно, если на путь по течению они затратили на 1,5 ч меньше, чем на путь против течения?
 5. Туристы на плоту отправились вниз по реке из пункта А. Через 3 ч 45 мин вслед за ними отправился катер, который догнал плот на расстоянии 20 км от пункта А. Скорость катера на 12 км/ч больше скорости плота. Сколько времени понадобилось катеру для того, чтобы догнать плот?
 6. Фермер на двух полях общей площадью 2 га вырастил картофель. С первого поля он собрал 55 т картофеля, а со второго — 54 т. Оказалось, что на втором поле урожайность выше, чем на первом, на 10 т/га. Какова урожайность картофеля на каждом из полей?
-
7. Турист проплыл на байдарке 20 км против течения и 14 км по течению реки и затратил столько же времени, сколько ему понадобилось бы для того, чтобы проплыть 42 км по озеру. Зная, что скорость течения 1 км/ч, найдите скорость байдарки в стоячей воде.

8. При одновременной работе двух насосов пруд был очищен за 5 ч 50 мин. Как быстро мог бы очистить этот пруд каждый из насосов, работая отдельно, если один из них может выполнить эту работу на 4 ч быстрее другого?
9. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, а через 2 ч из пункта A в пункт B выехал мотоциклист, который прибыл в B одновременно с велосипедистом. Если бы велосипедист и мотоциклист выехали из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно, то они встретились бы через 1 ч 20 мин после выезда. За сколько часов преодолел путь от A до B велосипедист?

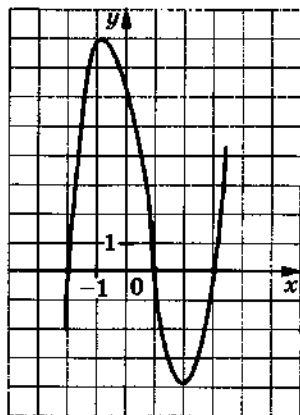
• Проверь себя!

1. Наименьшим корнем уравнения $\frac{(2x^2 + 11x - 15)(x^2 - 5)}{x + 1} = 0$ является число:
 А. -3 . Б. $-2,5$. В. $-\sqrt{5}$.

2. Все корни уравнения $\frac{3x^2 - 5x}{6} = \frac{x + 1}{9}$ принадлежат промежутку:
 А. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right]$. Б. $[2; +\infty)$. В. $(-\infty; 1)$.

3. Сколько корней имеет уравнение $\frac{y + 24}{y^2 - 8y} = \frac{y - 3}{y}$?
 А. Один. Б. Два. В. Три.

4. На рисунке 22 изображен график функции $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Какое из данных утверждений о корнях уравнения $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ верно?
 А. Уравнение имеет один положительный и два отрицательных корня.
 Б. Один из корней уравнения равен нулю.
 В. Уравнение имеет три корня.



5. Сумма всех корней уравнения $(x - 2)(x - 6) = (x^2 - 6)(x - 2)$ равна:
 А. 1. Б. 3. В. 6.

Рис. 22

6. Первый лыжник проходит расстояние 20 км на 20 мин быстрее второго, так как его скорость на 2 км/ч больше. Какое из данных уравнений соответствует условию задачи?

А. $\frac{20}{x} - \frac{20}{x+2} = 20$. Б. $\frac{20}{x} - \frac{20}{x-2} = \frac{1}{3}$. В. $\frac{20}{x} - \frac{20}{x+2} = \frac{1}{3}$.

Б А А В Б В

О-19. Системы уравнений с двумя переменными

1. В одной системе координат изобразите графики двух данных уравнений. Сколько общих точек у этих графиков?
 - 1) а) $7x - 9y = 63$ и $x - 9y = -18$;
 б) $y = x^2 + 4$ и $y = -x^2 + 8x - 12$;
 в) $x^2 + y^2 = 25$ и $xy = 6$;
 - 2) а) $4x + y = x^2$ и $y = -4$;
 б) $xy = 8$ и $x^2 - 2x + y - 9 = 0$;
 в) $x^2 - y^2 = 0$ и $y - x = 5$.
2. В одной системе координат изобразите графики двух данных уравнений и назовите координаты точек их пересечения (если таковые есть):
 - 1) а) $2x + y = 3$ и $x^2 + 4y = 0$;
 б) $x^2 + y^2 = 4$ и $x + y = 3$;
 в) $xy = -6$ и $x + y = 1$;
 - 2) а) $y + 4x = x^2 + 2$ и $2x - y = 7$;
 б) $x^2 + y^2 = 25$ и $4x^2 + 9y = 0$;
 в) $2x + 3y = 6$ и $y = -\frac{2}{3}x + 4$.
3. Убедитесь в том, что данная пара чисел является решением системы. Назовите еще хотя бы одну пару чисел, которая является решением данной системы:

а) $\begin{cases} xy = 12 \\ x^2 + y^2 = 25, (3; 4); \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6, (2; 3); \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy = 8 \\ 4x^2 - y^2 = 0, (2; 4); \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19 \\ x - xy + y = 7, (3; -2). \end{cases}$

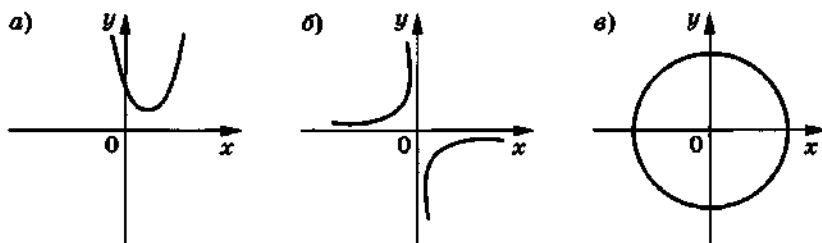


Рис. 23

4. На рисунке 23, а—в схематично изображены парабола, гипербола и окружность. Сколько общих точек может иметь с каждой из этих фигур прямая? Проиллюстрируйте ответ рисунком.

5. Решите систему уравнений:

1) а) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 4y = -1; \end{cases}$	2) а) $\begin{cases} \frac{x-3y}{5} - \frac{2x-y}{3} = -4 \\ \frac{x+4}{2} - \frac{11-3y}{4} = 4; \end{cases}$
б) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x^2 = 2y + 2x - 2; \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x^2 - 2x + y^2 - 5y = 8; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x - 5y = 3 \\ x^2 - 25y^2 = 15; \end{cases}$	в) $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 8; \end{cases}$
г) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - 2xy + y^2 - x = 6; \end{cases}$	г) $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 3. \end{cases}$

Решите систему уравнений (6—7):

6. а) $\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{12}{xy} + \frac{3}{y} = 1 \\ x - y = 1; \end{cases}$	в) $\begin{cases} \frac{24}{x^2+2x-8} - \frac{15}{y-3} = 2 \\ x^2 + 2x = y; \end{cases}$
б) $\begin{cases} \frac{4}{x^2} + \frac{8}{xy} - \frac{5}{y^2} = 0 \\ x + y = 3; \end{cases}$	г) $\begin{cases} 2x^2 + (y-4)^2 = 6 \\ 4x - xy = 2. \end{cases}$

7. 1) а) $\begin{cases} (x-3)(y-2)=0 \\ x^2+xy-y^2=0; \end{cases}$ 2) а) $\begin{cases} x^2+y^2=50 \\ 3x-3y+x^2+y^2=32; \end{cases}$
- б) $\begin{cases} x^2-4y^2=0 \\ \frac{1}{2}xy=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy+x^2=3 \\ y^2+5x(x+y)=19; \end{cases}$
- в) $\begin{cases} \frac{x-3}{y-2}=0 \\ y^2+3xy=2(x^2+2); \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{x+10}{xy}=\frac{y-3}{x} \\ x+y=5; \end{cases}$
- г) $\begin{cases} \frac{4}{x}+\frac{3}{y-1}=7 \\ 3x-y=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{6}{y^2+6y}-\frac{1}{z}=\frac{13}{yz} \\ z-2y=13. \end{cases}$

8. а) Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(2; 1)$ и $B(-2; 9)$, и постройте эту прямую.
 б) Напишите уравнение параболы $y=ax^2+bx$, проходящей через точки $A(2; 4)$ и $B(-1; -5)$, и постройте эту параболу.
9. Решите уравнение:
 а) $(x-2y+5)^2+(3y-2x-8)^2=0$;
 б) $(x^2-3xy+2)^2+(x-3y+1)^2=0$.

• Проверь себя!

1. Не выполняя построения, определите, в какой точке пересекаются прямые $3x-2y=7$ и $y-4x=-16$.
 А. $(4; 5)$. Б. $(5; 4)$. В. $(-5; -4)$.
2. Не выполняя построения, определите, сколько общих точек имеют параболы $y=x^2-7x+3$ и $y=-x^2+5x+3$.
 А. Две. Б. Одну. В. Ни одной.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2x-y)(x+3y)=15. \\ x+y=3 \end{cases}$
 А. $(-2,8; 5,8)$, $(3; 0)$.
 Б. $(3,7; -0,7)$, $(5; -2)$.
 В. $(3,5; -0,5)$, $(2; 1)$.
4. Сколько решений имеет система $\begin{cases} xy=3 \\ y=-\frac{1}{2}x^2+3,5? \end{cases}$
 А. Одно. Б. Два. В. Три.

5. Какой из систем уравнений соответствует рисунок 24?

А. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x + y = 5. \end{cases}$

Б. $\begin{cases} x - y = -1 \\ x^2 + y^2 = 3. \end{cases}$

В. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ xy = 6. \end{cases}$

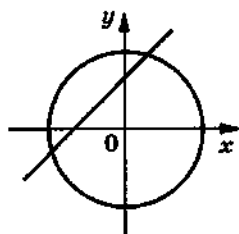


Рис. 24

6. Сколько решений имеет система $\begin{cases} (x-2)(y+5) = 0 \\ 3x - y^2 = 2? \end{cases}$
- А. Три. Б. Два. В. Одно.

* Правильный ответ: **Б А В В Б А**

О-20. Решение задач с помощью систем уравнений

Решите задачу, введя две переменные:

- Произведение двух чисел на 18 больше удвоенного большего числа. Найдите эти числа, если их сумма равна 11.
- За три тетради и пять карандашей заплачено 21 р., а за пять таких же тетрадей и восемь карандашей заплачено 34 р. 50 к. Сколько стоила одна тетрадь и один карандаш?
- Сумма двух чисел равна 360. Если одно из чисел увеличить на 20%, а другое уменьшить на 5%, то сумма результатов будет равна 392. Найдите эти числа.
- Сумма двух чисел равна 24. Найдите эти числа, если 35% одного из них равны 85% другого.
- Периметр прямоугольника 20 см. Если одну из его сторон и противоположную ей увеличить на 2 см, а каждую из оставшихся сторон уменьшить на 2 см, то площадь нового прямоугольника будет равна 16 см². Каковы стороны данного прямоугольника?
- Площадь прямоугольника 24 см². Если одну из его сторон и противоположную ей уменьшить на 3 см, а каждую из оставшихся сторон уменьшить на 1 см, то периметр нового прямоугольника будет равен 14 см. Каковы стороны данного прямоугольника?

7. Площадь прямоугольника 20 см^2 . Если одну из его сторон и противоположную ей уменьшить на 3 см , а каждую из оставшихся сторон увеличить на 2 см , то площадь полученного прямоугольника будет равна 28 см^2 . Каковы стороны данного прямоугольника?
8. Длина прямоугольника 30 см , ширина 4 см . На сколько сантиметров нужно уменьшить длину и на сколько ширину, чтобы его площадь уменьшилась вдвое, а периметр — на 22 см ?
-
9. Одна из диагоналей ромба на 4 см больше другой. Сторона ромба равна 10 см . Найдите длину каждой диагонали.
10. Длина диагонали прямоугольника равна 29 см , а его площадь 420 см^2 . Найдите периметр прямоугольника.
11. Двое рабочих вместе выполнили работу за 12 ч . Если бы первый рабочий выполнил половину этой работы, а затем второй — остальную часть, то они затратили бы на это 25 ч . За какое время каждый из рабочих может отдельно выполнить работу?
12. Расстояние между городами 480 км . Из этих городов навстречу друг другу выезжают автобус и автомобиль. Они могут встретиться на середине пути, если автобус выйдет на 3 ч раньше автомобиля. Если же они выйдут одновременно, то встретятся через 4 ч . Каковы скорости автомобиля и автобуса?
13. Сумма квадратов цифр положительного двузначного числа равна 13 . Если из этого числа вычесть 9 , то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

О-21. Графическое исследование уравнений

1. На рисунке 25 изображен график функции

$$y = x^3 - 3x^2.$$

1) Определите по графику координаты точек A , M , O , P , N и выполните проверку, подставив координаты в уравнение.

2) Решите с помощью графика уравнение:

а) $x^3 - 3x^2 = 0$;

б) $x^3 - 3x^2 = -4$.

3) Решите уравнение 2а без помощи графика.

4) Сколько решений имеет уравнение:

а) $x^3 - 3x^2 = 2$;

б) $x^3 - 3x^2 = -2$?

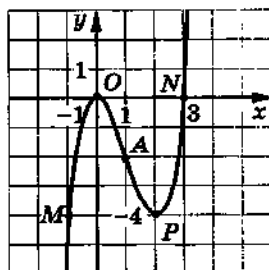


Рис. 25

2. В одной системе координат постройте графики следующих функций: $y = x^3$, $y = \frac{-2}{x}$, $y = -x + 2$.

1) С помощью графиков определите число корней каждого из уравнений:

а) $x^3 = \frac{-2}{x}$;

б) $x^3 = -x + 2$;

в) $\frac{-2}{x} = -x + 2$.

2) Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} y = x^3 \\ y = -x + 2 \end{cases}$

3. а) Решите графически уравнение $\sqrt{x} = -x^2 - 4x$.

б) Нельзя ли получить этот же ответ без использования графиков?

4. Сколько решений имеет каждая система уравнений:

1) а) $\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = -x + 1 \end{cases}$;

2) а) $\begin{cases} y = \frac{-4}{x} \\ y = 2x + 2 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} y = \frac{-4}{x} \\ y = -x + 1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} y = \frac{-4}{x} \\ y = x + 4 \end{cases}$;

3) а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = 4 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = 2\sqrt{2} \end{cases}$?

5. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - y = 5 \\ xy = 3 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x^2 + 2y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 1 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} y - x^3 = 0 \\ 2x + 3y + 6 = 0 \end{cases}$.

6. 1) Решите графически уравнение $\sqrt{x} = x^2 - 3,5x$ и убедитесь, что оно имеет ровно два корня, причем оба целые. Найдите эти корни.
 2) При каких значениях x выполняется неравенство $\sqrt{x} > x^2 - 3,5x$?
7. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} y = |x| \\ y = \frac{4}{x} \end{cases}$.
8. Не строя графиков, найдите координаты точек их пересечения:
 1) $y = x^2 - 2x - 3$ и $y = -x^2 + 2x - 1$;
 2) $y = x^2 + 2x - 5$ и $y = x^2 + 8x - 5$;
 3) $y = \frac{8}{x}$ и $y = x^2$.
9. Построив эскизы графиков, определите, сколько корней может иметь уравнение вида:
 1) $x^3 = kx + b$; 3) $ax^2 = \sqrt{x}$ при $a \neq 0$;
 2) $\sqrt{x} = kx + b$; 4) $x^2 - 2x = kx + b$.
10. Построив эскизы графиков, выясните, имеет ли система решения, и если да, то сколько:
 1) $\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ y = -x^2 + 5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = x^3 \\ y = x + 100 \end{cases}$
 2) $\begin{cases} y = |x| \\ y = 4 - x^2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 6 \end{cases}$

Глава 4. Арифметическая и геометрическая прогрессии

О-22. Числовые последовательности

1. Пусть (a_n) — последовательность оценок по алгебре, полученных вами за последнюю четверть. Запишите число a_1 .
2. Выпишите первые пять членов последовательности квадратов натуральных чисел:

10. Выпишите первые шесть членов последовательности, если:

а) $x_1 = 2$, $x_n = 2x_{n-1}$;

б) $b_1 = 3$, $b_n = 3 - b_{n-1}$;

в) $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_n = c_{n-1} + 2c_{n-2}$ для $n \geq 3$;

г) $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_n = d_{n-1}d_{n-2}$ для $n \geq 3$.

11. Верно ли, что члены последовательности (a_n) всех натуральных чисел, делящихся на 10, удовлетворяют соотношению $a_{n+1} = 10a_n$? Можете ли вы предложить какое-либо рекуррентное соотношение для членов этой последовательности?

12. Последовательность (a_n) задана формулой n -го члена:

а) $a_n = n^2 - 4$; б) $a_n = (\sqrt{2})^n$.

Содержатся ли в ней какие-либо иррациональные числа? отрицательные числа?

13. Последовательность (v_n) задана формулой n -го члена

$v_n = \frac{5-n}{n+1}$. Выпишите все положительные члены этой последовательности. Сколько таких членов?

14. Последовательность (z_n) задана формулой n -го члена

$$z_n = n^2 - 5n.$$

а) Выпишите все члены этой последовательности, меньшие 6. Сколько таких членов?

б) Сколько членов этой последовательности меньше 7? Выпишите эти члены.

в) Выясните, содержатся ли в этой последовательности числа -6, 11, 50. Если да, то каковы их номера?

15. Верно ли, что каждый член последовательности (x_n) , начиная со второго, больше ему предшествующего, если:

а) $x_n = 6^{n-1}$; б) $x_n = (-1)^n$?

16. а) Приведите пример какой-нибудь последовательности (a_n) , члены которой удовлетворяют соотношению

$$a_{n+1} = a_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Сколько таких последовательностей существует?

б) Двоечник Женя утверждает, что достаточно задать два каких-то члена последовательности, удовлетворяющей указанному рекуррентному соотношению, чтобы последовательность определялась однозначно. Прав ли он? Если нет, то как бы вы предложили его поправить?

17. Последовательность (b_n) такова, что выполнено рекуррентное соотношение $b_{n+1} = -b_n$. Какое максимальное количество различных чисел может быть в этой последовательности?
18. Последовательность (c_n) задана формулой n -го члена. Запишите выражение для c_{n-1} , $n > 1$. Задайте последовательность рекуррентной формулой:
 а) $c_n = 2n + 5$; б) $c_n = 5^{n-2}$; в) $c_n = n^2$.
19. Проверьте, удовлетворяет ли данная последовательность (x_n) рекуррентному соотношению $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$:
 а) $x_n = 1$; б) $x_n = n$; в) $x_n = 2^n$; г) $x_n = 3^n$; д) $x_n = 2^n + 3^n$.

О-23. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему одного и того же числа (т. е. такая последовательность (a_n) , что при любом натуральном n разность $a_{n+1} - a_n$ постоянна).

Формула n -го члена арифметической прогрессии (a_n) :

$$a_n = a_1 + d(n - 1),$$

где d — разность прогрессии.

1. Какая из следующих арифметических прогрессий является возрастающей? убывающей:
 а) 5, 10, 15, ...; г) -6, -4, -2, ...;
 б) 3, 0, -3, ...; д) 11, 9, 7, ...?
 в) 7, 12, 17, ...;
2. Разность арифметической прогрессии равна 2, а первый член равен 3. Выпишите первые 5 членов этой прогрессии.
3. Запишите три члена арифметической прогрессии, следующие за данными:
 а) 1, 1, 1, ...; б) 5, 3, 1, ...; в) -2, 2, 6,

4. В арифметической прогрессии, разность которой равна 5, известен четвертый член $a_4 = 14$. Восстановите начало этой прогрессии.
5. Рассматривается арифметическая прогрессия $-18, -14, -10, \dots$. Сколько в этой прогрессии отрицательных членов? Укажите номер ее первого положительного члена.
6. Дана арифметическая прогрессия (a_n) . Запишите формулу ее n -го члена и найдите a_{10}, a_{15}, a_{38} :
а) $-5, -3, -1, \dots$; б) $7, 10, 13, \dots$.
7. В арифметической прогрессии (x_n) известен первый член x_1 и разность d . Найдите x_{11} и x_6 :
а) $x_1 = 2, d = -3$; б) $x_1 = -5, d = 2$; в) $x_1 = 1, d = -10$.
8. Для каждой из следующих арифметических прогрессий установите, содержатся ли в ней число 5 и число 11, и если содержатся, то укажите их номера:
а) $-2, 3, \dots$; б) $119, 113, \dots$;
в) $-4, -1, \dots$; г) $-211, -209, \dots$.
9. Женя решил каждую неделю увеличивать нагрузку во время зарядки — поднимать гирию ежедневно на один раз больше, чем на прошлой неделе. В течение первой недели Женя ежедневно поднимал гирию по 15 раз.
а) Сколько раз Женя будет поднимать гирию ежедневно на пятой неделе?
б) Запишите формулу для вычисления того, сколько раз Женя будет ежедневно поднимать гирию на n -й неделе.
в) С помощью этой формулы определите, сколько раз Женя будет ежедневно поднимать гирию на 25-й неделе.
г) Запишите формулу для вычисления того, сколько раз Женя планирует поднимать гирию за всю n -ю неделю.
д) Постройте столбчатую диаграмму, показывающую, сколько раз Женя планирует поднимать гирию за каждую из первых пяти недель.
10. Последовательность (u_n) — арифметическая прогрессия. Найдите:
а) u_1 , если $u_{10} = 13, d = 5$;
б) d , если $u_1 = 6, u_{14} = 32$.

11. Двочник Женя хвастается, что полученные им за четверть пять оценок по алгебре образуют арифметическую прогрессию. Запишите все возможные варианты такой прогрессии. Какой может быть разность этой прогрессии?
12. Рассматривается арифметическая прогрессия (a_n) . Найдите a_1 и d , если:
- а) $a_3 = 27$, $a_{10} = 42$; г) $a_{11} = 39$, $a_{20} = 75$;
 б) $a_7 = 8$, $a_{13} = 20$; д) $a_5 = 0$, $a_{11} = -3$.
 в) $a_4 = -11$, $a_{12} = -35$;
13. Рассматривается арифметическая прогрессия 267, 264, 261, Содержатся ли в ней отрицательные числа? Если да, то укажите их номера.
14. Найдите первый положительный член арифметической прогрессии $-318, -314, -310, \dots$.
15. Начиная с какого номера члены арифметической прогрессии $-14, -6, 2, \dots$ будут больше 800?
16. Найдите такое число x , что числа:
 а) $2, x^2, 6$; б) $x+2, 2, x^2$
 образуют арифметическую прогрессию.
17. Докажите, что последовательность, заданная формулой n -го члена, является арифметической прогрессией:
 а) $a_n = 4n - 1$; б) $b_n = 2 - 3n$; в) $c_n = 7 + 2n$.
18. На рисунке 26 изображены члены некоторой последовательности (a_n) , где a_n — ордината точки с абсциссой n . Является ли эта последовательность арифметической прогрессией?
- 19*. Верно ли, что если последовательности (a_n) и (b_n) являются арифметическими прогрессиями, то последовательность (c_n) , такая, что $c_n = a_n + b_n$, также обязательно является арифметической прогрессией? (Разберите конкретные примеры,

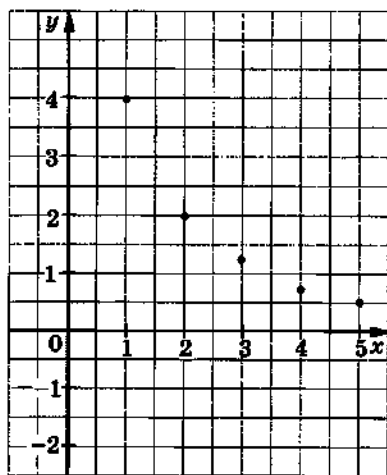


Рис. 26

а потом попробуйте провести доказательство в общем виде.)

20. Верно ли, что если последовательности (a_n) и (b_n) являются арифметическими прогрессиями, то последовательность (c_n) , такая, что $c_n = a_n b_n$, также обязательно является арифметической прогрессией? Может ли она оказаться арифметической прогрессией для каких-то прогрессий (a_n) и (b_n) ? (Рассмотрите конкретные примеры.)
21. Известно, что в арифметической прогрессии (a_n) член $a_{25} = 4$. Найдите:
- а) сумму $a_{24} + a_{26}$;
б) наибольшее значение произведения $a_{24} \cdot a_{26}$.

О-24. Сумма первых n членов арифметической прогрессии

Сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n) определяется по формуле

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

или по формуле

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n,$$

где d — разность прогрессии.

1. Найдите сумму первых двенадцати членов арифметической прогрессии (a_n) , если:
- а) $a_1 = 3$, $d = 2$; в) $a_1 = 5$, $d = -3$;
б) $a_1 = -1$, $d = 4$; г) $a_1 = 6$, $d = 1$.
2. В арифметической прогрессии (a_n) $a_1 + a_{15} = 1$. Найдите сумму первых пятнадцати членов этой прогрессии.
3. В арифметической прогрессии (b_n) $b_1 + b_k = 0$. Найдите сумму первых k членов этой прогрессии.
4. Найдите сумму всех натуральных чисел:
- а) от 1 до 200; б) от 1 до 300; в) от 10 до 150.

5. Сколько последовательных натуральных чисел, начиная с 1, надо сложить, чтобы в сумме получить 325?
6. Найдите сумму первых двадцати членов данной арифметической прогрессии:
а) 2, -1, -4, ...; б) -3, -2, -1, ...; в) -7, -3, 1, ...
7. В сказке рассказывается, что первый змей выпил три бочки воды, второй — на две больше, третий — еще на две больше и т. д. Сколько всего бочек воды выпили 30 змеев?
8. Дама сдавала в багаж семь предметов, самый легкий из них весил 5 кг, следующий по весу — на 2 кг больше, следующий — опять на 2 кг больше и т. д. Сколько весил весь сданный багаж?
9. Мама предложила сыну на выбор два варианта: давать ему ежедневно на карманные расходы в течение месяца по 80 р. или дать в первый день 5 р., зато в следующий на 5 р. больше, в следующий еще на 5 р. больше и т. д. в течение месяца. Какой вариант выгоднее для сына, если мама с сыном договариваются на март? на апрель?

10. Арифметическая прогрессия задана формулой

$$x_n = 5n + 1.$$

Найдите:

- а) S_{11} ; б) S_{25} ; в) S_n .

11. Арифметическая прогрессия задана формулой

$$y_n = -3n + 2.$$

Найдите:

- а) S_{12} ; б) S_{30} ; в) S_n ; г) такое n , что $S_n = -590$.

12. Найдите сумму:

- а) всех натуральных чисел, кратных 3, от 3 до 99;
- б) всех натуральных чисел, кратных 6, от 6 до 96;
- в) всех трехзначных чисел;
- г) всех отрицательных целых чисел, кратных 5 и больших -150;
- д) всех трехзначных чисел, не кратных 5.

13. В арифметической прогрессии (c_n) $c_5 = 10$, $c_{10} = 25$. Найдите сумму первых 20 членов этой прогрессии.
14. В арифметической прогрессии (x_n) $x_{12} = 8$, $x_{20} = 34$. Найдите сумму первых 30 членов этой прогрессии.
15. Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии $-311, -306, -301, \dots$.
16. Рассматривается последовательность, формула n -го члена которой $y_n = -2n + 1$. Докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией, и найдите сумму ее первых 100 членов.
17. Рассматривается арифметическая прогрессия 2, 7, 12, Найдите наименьшее натуральное число n , такое, что сумма всех членов этой прогрессии с номерами, меньшими n , больше 246.
18. а) Найдите формулу для нахождения суммы первых n членов последовательности $u_n = 2n + 1$.
б)* Известно, что сумма n первых членов некой последовательности при любом натуральном n вычисляется по формуле $S_n = n^2 + 2n$. Найдите формулу n -го члена этой последовательности.
19. В арифметической прогрессии $S_{40} = 1160$, $S_{20} = 180$. Найдите S_{15} .
20. Рассматривается таблица 10×10 . Известно, что числа, записанные в каждой строчке, образуют возрастающую арифметическую прогрессию с разностью 2, а числа, записанные (сверху вниз) в первом столбце, — возрастающую арифметическую прогрессию с разностью 3. В левом верхнем углу стоит число 1. Найдите сумму всех чисел, стоящих в таблице.
21. В арифметической прогрессии (x_n) $x_5 = 2$. Найдите S_9 .
- 22*. Рассматривается арифметическая прогрессия (t_n) . Известно, что $t_1 + t_3 + \dots + t_{2005} = t_2 + t_4 + \dots + t_{2004}$. Найдите сумму первых 2005 членов этой прогрессии.

О-25. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называют последовательность, первый член которой не равен нулю, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число (называемое знаменателем прогрессии).

Формула n -го члена геометрической прогрессии (b_n):
 $b_n = b_1 q^{n-1}$, где q — знаменатель прогрессии.

1. В геометрической прогрессии (b_n) дан первый член и знаменатель. Запишите первые пять членов этой прогрессии, если:
а) $b_1 = 3$, $q = 2$;
б) $b_1 = -2$, $q = 4$;
в) $b_1 = 1$, $q = -3$.
2. Дана геометрическая прогрессия. Найдите ее знаменатель и запишите первые пять членов:
а) 6, 3, ...; б) 2, -1, ...; в) 5, 25, ...; г) 3, -9, ...
3. Покажите, что следующие последовательности не являются геометрическими прогрессиями:
а) 2, 4, 6, ...; б) -1, -4, 16, ...; в) 0, 0, 0, ...
4. К Марко «вошел великан, наклонившись» (А. С. Пушкин. «Песни западных славян»). Был он шестиметрового роста. «На другие сутки в ту же пору» вошел человек двухметрового роста. «В третий день вошел карлик малый». Определите его рост, если известно, что рост приходящих убывал в геометрической прогрессии.
5. Может ли член геометрической прогрессии быть равен нулю? единице?
6. Света убеждена, что всякая последовательность является либо арифметической, либо геометрической прогрессией. Права ли она?
7. В геометрической прогрессии все члены отрицательны. Каков знак ее знаменателя?
8. В геометрической прогрессии второй и четвертый члены отрицательны. Каким может быть знак знаменателя? Приведите примеры.

9. Какая из следующих геометрических прогрессий является возрастающей:
- а) 2, 8, 32, ...; в) 1, -5, 25, ...;
- б) 10, 1, $\frac{1}{10}$, ...; г) 3, 21, 147, ...?
10. В геометрической прогрессии (x_n) $x_1 = 2$. Укажите, при каком из приведенных ниже знаменателей q прогрессия будет убывающей:
- а) 2; б) -2; в) 0,9; г) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
11. Женя считает, что если знаменатель q произвольной геометрической прогрессии больше 1, то эта прогрессия является возрастающей. Прав ли он?
12. Люда считает, что если в геометрической прогрессии, первый член которой положителен, знаменатель меньше 1, то эта последовательность является убывающей. Права ли она?
13. Герой притчи решил приучить свою лошадь не есть. С этой целью он решил ежедневно давать ей еды вдвое меньше, чем в предыдущий день. Какую часть первоначальной порции он дал лошади на пятый день?
14. Ростовщик согласился одолжить просителю 1000 р., с тем что сумма не отданного на конец каждого следующего месяца долга будет удваиваться. Сколько денег должен отдать проситель через пять месяцев, если до того он ничего не смог отдать?
15. Геракл, сражаясь с гидрой, отрубал у нее головы. Однако после того, как он отрубает все головы, на месте каждой вырастают три новые. Сколько голов оказалось у гидры после того, как Геракл трижды срубил все головы (вначале у гидры было 12 голов)?
16. В геометрической прогрессии (c_n) дан первый член и знаменатель. Запишите формулу n -го члена этой прогрессии и найдите c_{10} , если:
- а) $c_1 = 4$, $q = 2$; б) $c_1 = -3$, $q = -2$; в) $c_1 = 10$, $q = \frac{1}{10}$.
17. Дана геометрическая прогрессия:
- а) 2, 22, ...; б) 5, -15, ...; в) 3, 12,
- Запишите формулу ее n -го члена.
18. Отметьте точками координатной плоскости четыре члена прогрессии, первый член которой равен 1, а второй - 3.

19. Мальчик набрал на восьмиразрядном калькуляторе единицу и стал последовательно умножать числа, получающиеся на дисплее, на 10. Сколько раз ему удастся это сделать?

20. Определите знаменатель и первый член геометрической прогрессии (y_n), если:

а) $y_2 = 15$, $y_4 = 375$;

в) $y_2 = 2$, $y_5 = 0,25$;

б) $y_3 = 18$, $y_6 = -486$;

г) $y_3 = \frac{1}{10}$, $y_5 = \frac{1}{1000}$.

Выпишите первые пять членов этой прогрессии. Сколько решений имеет данная задача (в каждом случае)?

21. Вставьте два пропущенных члена в геометрическую прогрессию:

а) 3, ..., ..., 81, ...;

б) 5, ..., 20, ..., 80, ...;

в) -2, ..., ..., -0,002,

Сколько решений имеет эта задача в каждом случае?

22. Найдите число x , такое, что числа x , 2, 4 являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

23. Найдите число x , такое, что числа 1, x , 4 являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Сколько решений имеет эта задача?

24. Найдите число x , такое, что числа 4, x , 25 являются тремя последовательными членами возрастающей геометрической прогрессии. Сколько решений имеет эта задача?

25. Докажите, что последовательность (a_n) является геометрической прогрессией, если:

а) $a_n = 5^{n+1}$;

б) $a_n = 3^{n-1}$;

в) $a_n = 4 \cdot (-3)^{n+2}$.

26. Рассматривается геометрическая прогрессия. Докажите, что ее члены с номерами, делящимися на 3, образуют геометрическую прогрессию.

27. Рассматриваются круги, площади которых образуют геометрическую прогрессию. Докажите, что их радиусы также образуют геометрическую прогрессию.

28. Рассматриваются две геометрические прогрессии (a_n) и (b_n) . Докажите, что последовательность (c_n) , такая, что $c_n = a_n b_n$, тоже является геометрической прогрессией.
29. В геометрической прогрессии (a_n) $a_7 = 2$. Найдите произведение:
а) $a_6 \cdot a_8$; б) $a_5 \cdot a_9$.
- 30*. Может ли последовательность быть одновременно и арифметической, и геометрической прогрессией? Если да, то опишите все такие последовательности.

О-26. Сумма первых n членов геометрической прогрессии

Сумма первых n членов геометрической прогрессии (b_n) со знаменателем $q \neq 1$ равна

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Если $q = 1$, то $S_n = nb_1$.

- Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии (b_n) , если:

а) $b_1 = 2, q = 3$;	в) $b_1 = 4, q = -3$;
б) $b_1 = -1, q = 4$;	г) $b_1 = 0,5, q = 0,5$.
- Найдите сумму первых десяти членов геометрической прогрессии:

а) 4, 2, 1, ...;	в) 4, 20, 100, ...;
б) 3, -9, 27, ...;	г) $-2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \dots$
- Геометрическая прогрессия (c_n) задана формулой n -го члена. Найдите сумму первых семи ее членов, если:

а) $c_n = 5 \cdot 3^{n-1}$;	б) $c_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$;	в) $c_n = 4^n$.
------------------------------	--	------------------
- Дана геометрическая прогрессия 1, 3, 9, Найдите:
 - сумму шести ее первых членов;
 - сумму n ее первых членов;
 - сколько последовательных членов этой прогрессии, начиная с первого, надо сложить, чтобы получить 121.

5. Может ли сумма первых n членов геометрической прогрессии быть равной нулю? Если да, приведите примеры. Каким должен быть знаменатель такой прогрессии?
-

6. Вычислите:

а) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^8}$;

б) $-1 + 0,1 - 0,01 + \dots - 0,00000001$;

в) $25 - 5 + 1 - \dots + (-5)^{8-n}$.

7. Дана геометрическая прогрессия 2, -6, 18, Найдите сумму ее первых пяти отрицательных членов.
8. Найдите сумму первых десяти членов геометрической прогрессии (d_n) , если:
- а) $d_2 = 10$, $d_5 = 1250$;
- б) $d_2 = \frac{3}{4}$, $d_4 = \frac{3}{64}$;
- в) $d_3 = \frac{2}{3}$, $d_5 = \frac{2}{27}$.

Сколько решений имеет задача в каждом случае?

9. Сколько последовательных членов геометрической прогрессии -4, 2, -1, ..., начиная с первого, надо сложить, чтобы получить $-\frac{21}{8}$?
10. Сколько последовательных членов геометрической прогрессии 3, 15, 75, ..., начиная с первого, надо сложить, чтобы получить 2343?
11. Сколько последовательных членов геометрической прогрессии 1, 2, 4, ..., начиная с первого, можно сложить (максимум), чтобы получить сумму, меньшую 127?
12. Сколько последовательных членов геометрической прогрессии 1, 3, 9, ..., начиная с первого, надо сложить (минимум), чтобы полученная сумма была больше 121?
13. Сумма четырех последовательных членов геометрической прогрессии со знаменателем 2 равна 75. Найдите первый член этой прогрессии.
14. Упростите выражение (считая, что $x \neq 1$):
- а) $x^3 + x^6 + \dots + x^{30}$; б) $1 + x^5 + x^{10} + \dots + x^{50}$.

- 15*. Приведите пример геометрической прогрессии, такой, что не все ее члены положительны, но суммы ее первых n членов для всякого n положительны. Может ли у такой прогрессии быть положительный знаменатель? знаменатель, больший 1? знаменатель, меньший - 1?
16. В таблице 10×10 записаны числа. Известно, что числа, стоящие в каждой строчке, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2 и числа, стоящие в первом столбце (сверху вниз), также образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Найдите сумму всех чисел, стоящих в таблице.
- 17*. Рассматривается последовательность (c_n) , заданная формулой n -го члена: $c_n = 2^n + n$. Является ли эта последовательность арифметической или геометрической прогрессией? Выведите формулу для вычисления ее первых n членов.

О-27. Простые и сложные проценты

При определении сложных процентов можно использовать калькулятор.

Пример 1. На строительстве завода первоначально работали 1000 человек. В дальнейшем население образовавшегося поселка ежемесячно возрастало на 20% от первоначального. Сколько жителей было в поселке через один месяц? через два месяца? через три месяца? через n месяцев?

Решение. 20% от 1000 человек — это 200 человек. Через месяц население составляло 1200 человек, через два — 1400 человек, через три — 1600 человек, через n месяцев — $1000 + 200n$ человек.

Пример 2. На строительстве завода первоначально работали 1000 человек. В дальнейшем население образовавшегося поселка ежемесячно возрастало на 20%. Сколько жителей было в поселке через один месяц? через два месяца? через три месяца? через n месяцев?

Решение. Население поселка ежемесячно возрастало в 1,2 раза. Поэтому через месяц оно составляло 1200 человек, через два — 1440 человек, через три — 1728 человек, через n месяцев — $1000 \cdot 1,2^n$ человек.

1. Выразите десятичной дробью:
а) 3%; б) 7%; в) 0,4%; г) 2,65%; д) 0,07%.
2. Найдите:
а) 5% от 200; в) 0,2% от 16;
б) 4% от 250; г) 0,05% от 340.
3. Сколько процентов составляет:
а) число 20 от числа 400;
б) число 70 от числа 280;
в) число 3 от числа 240?
4. 1) Больше или меньше 10% составляет:
а) число 35 от числа 321;
б) число 70 от числа 635?
2) Больше или меньше 11% составляет число 70 от числа 635?
5. Цена шапки равна a . Какова будет ее цена, если:
а) ее повысят на 30%, на 5%, на 6,5%;
б) ее снизят на 45%, на 90%, на 0,4%?
6. Во сколько раз выросла цена товара, если она повысилась на 7%? на 25%? на 38,5%?
7. По договору с издательством автор должен получить за книгу 4000 р. За каждый просроченный день выплаты ему должны выплачивать дополнительно 0,1% от этой суммы.
а) Сколько должно выплатить автору издательство, если выплата просрочена на 60 дней? Сколько процентов это составит от планируемой суммы?
б) Через сколько дней издательству придется заплатить автору вдвое больше, чем планировалось?
8. Комиссионный магазин принял товар на продажу. Его первоначальная цена составила 5000 р., однако было оговорено, что если товар не будет продан к установленному сроку, то ежемесячно цена его будет снижаться на 5% от первоначальной стоимости.
а) Сколько будет стоить товар через пять месяцев после установленного срока?
б) Через сколько месяцев этот товар будет продаваться по цене, меньшей 3000 р.?
9. Гражданин забыл заплатить налог. За каждый просроченный месяц надо платить определенный процент от

- суммы налога в качестве штрафа. Через год он получил извещение, что должен заплатить 12 р. штрафа.
- Можете ли вы указать, какой процент штрафа положено платить за месячную просрочку?
 - Укажите процент за месяц просрочки, если надо было заплатить 100 р. налога.
 - Забывчивый гражданин еще год не платил налог. Какой штраф ему теперь придется заплатить?
- Вкладчик положил 1000 р. на вклад, годовой доход по которому равен 2%. Какая сумма будет на счете через 1 год? через 2 года? через 3 года? Сколько процентов от первоначальной составит сумма, находящаяся на счете, через 3 года? Запишите формулу для вычисления количества денег на счете через n лет (при условии, что деньги не снимают со счета и не кладут на счет).
 - Считая, что проезд в транспорте ежегодно дорожает на 50%, определите, сколько он будет стоить через год, если в настоящее время он стоит 12 р.; через два года. Проиллюстрируйте на столбчатой диаграмме, как растет цена проезда за эти три года.
 - Учитывая уровень инфляции, на предприятии ежемесячно, начиная с января, повышают зарплату на 5%.
 - Во сколько раз увеличивают зарплату ежемесячно?
 - Во сколько раз возрастает зарплата через два месяца? через четыре месяца?
 - Имеется альтернативный проект, по которому следует выплачивать ежемесячно больше на 6% от декабрьской зарплаты. Во сколько раз возрастет зарплата через четыре месяца по этому проекту?
 - По какому проекту десятая зарплата после начала повышений больше?
 - Реальный среднедушевой доход в некой стране ежегодно уменьшается на 50%. Пусть в какой-то год он составляет 20 тыс. условных единиц. Чему будет равен среднедушевой доход через год? через два года? Проиллюстрируйте на столбчатой диаграмме изменение среднедушевого дохода за эти три года.
 - Банк берет с каждой помещаемой на счет и снимаемой со счета суммы 1%. Человек поместил на счет 50 000 р., потом снял эти деньги, а затем, не потратив, положил их обратно. Сколько денег у него оказалось на счету?
 - Обменный пункт берет за услугу 10% от меняемой суммы, но зато все время и покупает, и продает ва-

люту по одной и той же цене. Надеюсь спасти свои сбережения в период кризиса, человек менял деньги четыре раза («туда и обратно»). Какая часть от первоначальной суммы у него осталась?

16. Анна Ивановна и Петр Петрович положили по 1000 р. в банк, выплачивающий ежегодно по 10% от суммы, находящейся на счете. Но Анна Ивановна ежегодно забирает проценты и прячет их в чулок, а Петр Петрович оставляет их в банке. Запишите формулу, выражающую сумму денег у каждого из них через n лет. Чему равны эти суммы через 3 года? через 5 лет?

17. Первоначальная зарплата работника определена в 200 000 р. в год, однако оговорено, что она будет ежегодно возрастать на 10% от первоначальной. Сколько денег получит этот работник за 5 лет?
18. В банк положены деньги под 5% годовых. Через два года на счете оказалось 11 025 р. Сколько денег было положено первоначально (деньги со счета не снимали и на счет не клали)?
19. За два года сумма на счете возросла на 44%, притом что деньги со счета не снимали и на счет не клали. Какой процент выплачивает банк ежегодно?
20. В банк положена 1000 р. Через два года на счете оказалось 1210 р. Какой процент выплачивал банк ежегодно (деньги со счета не снимали и на счет не клали)?
21. Гражданин открыл счет на 1000 р., через год положил еще 1000 р., со счета он деньги не снимал. Через два года после открытия счета на нем лежало 2640 р. Какой процент выплачивает банк ежегодно?

• Проверь себя!

1. Член последовательности (a_n) , непосредственно предшествующий члену a_k , — это:
 А. a_{k-1} . Б. $a_{\frac{k}{2}}$. В. a_{-1} .
2. Последовательность (x_n) : 4, 2, $\frac{4}{3}$, 1, ... надо задать формулой n -го члена. Эта формула:
 А. $x_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Б. $x_n = \frac{4}{n}$. В. $x_n = n + 3$.

3. Последовательность (c_n) задана рекуррентно: $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_{n+1} = -c_{n-1}$. Число 2 в ней встретится:
А. Ровно один раз.
Б. 23 раза.
В. Бесконечно много раз.
4. Пятый член арифметической прогрессии, первый член которой 3, а разность равна -2 , равен:
А. 0. Б. -5 . В. -15 .
5. Рассматривается арифметическая прогрессия (y_n) . Точки с координатами $(n; y_n)$ лежат на:
А. Какой-то параболе.
Б. Какой-то прямой.
В. Какой-то окружности.
6. Сумма первых n членов арифметической прогрессии, первый член которой равен 5, а разность равна 3:
А. Ни при каком n не равна 55.
Б. Равна 55 при одном каком-то n .
В. Равна 55 при двух различных n .
7. В геометрической прогрессии (c_n) $c_3 = 25$, а $c_5 = 625$. В этой прогрессии:
А. Обязательно $c_2 = 5$.
Б. Обязательно $c_2 = 5$ или $c_2 = -5$.
В. c_2 может быть произвольным числом.
8. Геометрической прогрессией не является последовательность (x_n) , заданная формулой общего члена:
А. $x_n = 2 \cdot 3^{n-5}$. Б. $x_n = 3 \cdot 3^{2-n}$. В. $x_n = 3^n - 1$.
9. Сумма $3 - 6 + 12 - \dots + 192$ равна:
А. 129. Б. -129 . В. Числу, отличному от названных.
10. Человек положил в банк 1000 р., через год забрал 1000 р., а еще через год на счете у него оказалась 1000 р. (не считая копеек).
А. Такого не может быть.
Б. Банк выплачивал ежегодно 1000%.
В. Оба предыдущих ответа неверны.

А Б В Б Б Б Б В А В

Глава 5. Статистические исследования

О-28. Выборки

1. Укажите, что является генеральной совокупностью обследуемых данных, если определяют:
 - а) размеры доходов среднего пенсионера;
 - б) успеваемость учащихся вашей школы;
 - в) средний размер налогов, выплачиваемых гражданами России;
 - г) частоту рифмы «роза — мороза» в русской поэзии XIX в.;
 - д) среднее время, посвящаемое девятиклассниками телефонным разговорам.

2. Для каждого из приведенных ниже случаев объясните, была ли репрезентативной указанная выборка. Убедительны ли сделанные выводы?
 - а) Женя хотел узнать, за какую футбольную команду болеют его сверстники. Для этого он опросил трех своих друзей и выяснил, что все они болеют за «Спартак». «Спартак» — любимец молодежи, — умозаключил Женя.
 - б) Изучали мнение россиян о том, нужно ли тратить средства на расширение телефонной сети. Для этого случайным образом по телефонной книге отобрали тысячу человек и опросили их. Большинство из них ответило, что бюджетные средства надо тратить на другие цели. Так и поступили.
 - в) Выясняли, помнят ли школьники стихи Пушкина. С этой целью случайным образом отобрали 5 тыс. девятиклассников. Выяснилось, что 75% из них помнят хотя бы по одному стихотворению. Заключили, что это и есть средний результат.

3. Дан ряд чисел: 12, 14, 12, 12, 12, 15, 13, 12, 13, 14, 15, 12, 15, 14, 14.
 - а) Расположите эти числа в порядке возрастания.
 - б) Определите относительную частоту появления каждого числа.

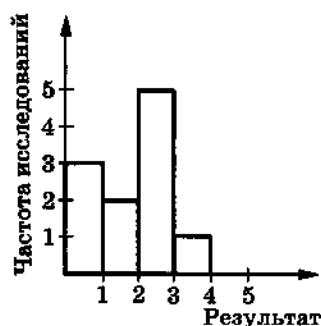


Рис. 27

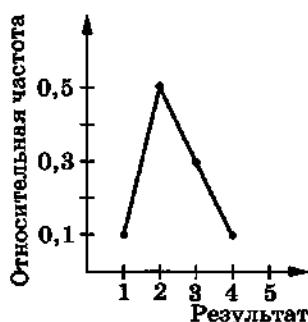


Рис. 28

- в) Представьте эти данные на диаграмме.
 г) Определите моду, медиану и среднее арифметическое этого ряда.
4. На рисунке 27 построена диаграмма распределения результатов некоторого исследования. Определите среднее арифметическое этого ряда чисел (результатов).
5. Дан ряд чисел: 10, 9, 9, 12, 11, 8, 12, 13, 8, 9, 11, 10, 10, 10, 11, 9, 12, 13, 9.
 а) Расположите эти числа в порядке возрастания.
 б) Определите относительные частоты появления каждого числа.
 в) Определите моду, медиану и среднее арифметическое данного ряда.
 г) Постройте для данного ряда полигон.
6. На рисунке 28 изображен полигон относительных частот появления чисел в ряде. Приведите пример соответствующего ряда.
7. На выборах президента некоторой страны есть четыре кандидата: А, Б, В и Г. Чтобы определить популярность каждого кандидата, социологи опросили 2000 человек. Результаты приведены в следующей таблице:

Кандидат	А	Б	В	Г	Против всех
Количество отданных голосов	300	220	450	130	900

Определите относительную частоту проявления в выборке каждой точки зрения. Представьте эти данные на столбчатой диаграмме.

8. Сдав экзамен, девятиклассники выходили из кабинета и называли полученные оценки. Первые пятнадцать оценок таковы:

5, 5, 4, 5, 4, 3, 3, 4, 5, 5, 3, 3, 3, 2, 5.

- Определите относительные частоты каждой из оценок.
 - Представьте эти данные на столбчатой диаграмме.
 - Представьте эти данные с помощью полигона.
 - Определите наиболее часто встречающуюся оценку (моду).
 - Определите среднее арифметическое полученных ребятами оценок.
 - Считаете ли вы эту выборку репрезентативной для суждения о результатах класса на экзамене?
9. В одном городе исследовали, сколько детей до 18 лет растет в семьях. Для этого было опрошено 1000 семей. Результаты опроса приведены в следующей таблице:

Количество детей в семье	0	1	2	3	4	5
Количество семей	250	450	204	78	12	6

- Определите соответствующие относительные частоты.
 - Представьте эти данные на столбчатой диаграмме.
 - Представьте эти данные с помощью полигона.
 - Определите, сколько детей чаще всего бывает в семье (значение моды).
10. Социологи опросили 50 школьников, выясняя, сколько книг каждый из них прочел за прошедший месяц. Были получены следующие данные:
- 0, 2, 6, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 7, 5, 5, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 2, 1, 3, 4, 3, 4, 3, 3, 4, 4, 0, 0, 0, 3, 3, 3, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 3, 4, 4, 3, 3, 1, 2, 5.
- Постройте таблицу частот.
 - Определите моду ряда (самое распространенное число).
 - Постройте диаграмму частот.
 - Найдите среднее арифметическое данных чисел.
 - Постройте полигон частот.

О-29. Интервальные ряды

Пример. Дан ряд: 1, 4, 13, 5, 4, 6, 7, 3, 12, 1, 5, 4, 11, 10, 12.

Составим интервальный ряд с длиной интервала, равной 2. За начало первого интервала возьмем число, расположенное на пол-интервала левее наименьшего члена, т. е. $1 - 1 = 0$. Теперь выпишем все числа, попадающие в каждый из интервалов, причем если число оказывается на границе интервалов, то будем считать его лежащим в правом промежутке.

Промежуток	Числа из промежутка	Частота
0—2	1, 1	2
2—4	3	1
4—6	4, 5, 4, 5, 4	5
6—8	6, 7	2
8—10	Нет	0
1—12	11, 10	2
12—14	13, 12, 12	3

- Дан ряд чисел: 1, 4, 5, 3, 7, 3, 2, 3, 2, 1, 6, 5, 6, 1, 4.
 - Определите размах ряда.
 - Ряд разбили на интервалы длины 2, определите границы каждого интервала.
 - Определите, в какой интервал попадает каждое из чисел ряда.
 - Определите частоту попадания чисел в каждый из интервалов.
- Дан ряд чисел: 5, 12, 1, 2, 6, 7, 12, 3, 6, 5, 9, 3, 12, 3, 5, 12, 7, 14, 7, 8, 9, 2, 3, 9, 1. Постройте гистограмму частот интервального ряда с длиной интервала 3.
- Дан ряд чисел: 4, 2, 9, 12, 14, 3, 12, 5, 7, 9, 9, 8, 3, 7, 3, 7, 6, 5, 3, 4. Постройте интервальный ряд, выбрав какую-либо длину интервала. Постройте для полученного интервального ряда гистограмму частот.

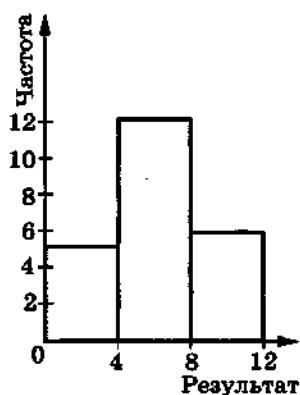


Рис. 29

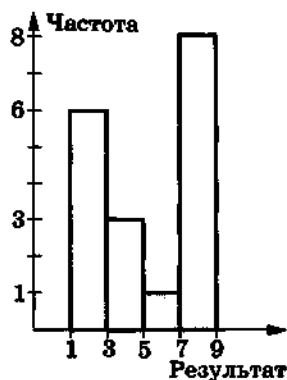


Рис. 30

4. На рисунке 29 изображена гистограмма частот интервального ряда. Соответствует ли она ряду
3, 4, 9, 10, 7, 4, 6, 5, 3, 4, 2, 4, 3, 5, 6, 7, 3, 5, 8, 9, 10, 11, 10, 3, 4?
5. На рисунке 30 изображена гистограмма частот интервального ряда. Составьте упрощенный ряд, такой, что членами его являются середины данных интервалов, а встречаются они с соответствующей интервалу частотой.
6. По некоему ряду построен интервальный ряд, гистограмма которого изображена на рисунке 31. Как бы вы определили (примерно) среднее арифметическое чисел исходного ряда?

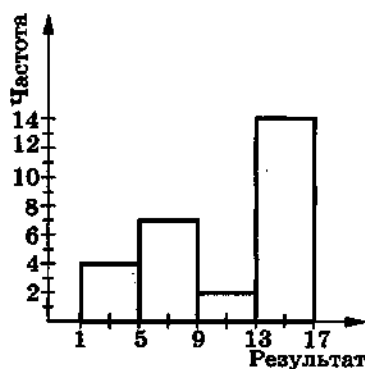


Рис. 31

7. Выясняли размеры ежемесячных доходов у граждан некоторого района. Для этого опросили тысячу человек. Результаты опроса приведены в таблице.

Доход, р.	Меньше 15 000	15 000—30 000	30 000—45 000	45 000—60 000	60 000—75 000	75 000—90 000	90 000—105 000
Количество человек	350	250	203	102	58	25	12

Составьте по этим данным гистограмму частот и определите (примерно) средний по сделанной выборке доход.

8. Социологи провели опрос 1000 школьников, выясняя, сколько времени они в среднем тратят в день на приготовление домашнего задания. Результаты опроса показаны на гистограмме (рис. 32).

а) Сколько времени делает домашнее задание большинство школьников?

б) Какой процент составляют самые усидчивые школьники?

в) Сколько времени в среднем делают домашнее задание школьники из приведенной выборки?

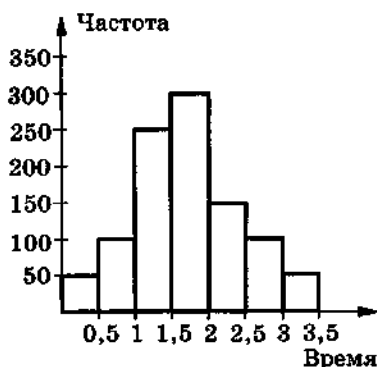


Рис. 32

9. Проводили исследование, сколько времени приходится тратить в день в среднем на домашнее хозяйство. Опросили 50 человек и получили следующий ряд значений (в ч):

1; 1,5; 2; 2; 1; 0; 2,5; 1; 0,5; 1; 2; 1,5; 1;
3; 2,5; 1; 1; 1; 0; 0,5; 4; 2; 0,5; 3; 1; 5; 0,5;
1; 0; 1; 0,5; 2,5; 3,5; 0,5; 1; 2; 0,5; 1,5; 2; 4;
1; 0,5; 2,5; 1,5; 3,5; 4; 0; 3; 2; 1.

Выберите удобную, с вашей точки зрения, длину интервала и составьте по приведенным данным интервальный ряд. Постройте для него гистограмму частот.

О-30. Характеристики разброса

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — ряд чисел, d — их среднее арифметическое.

Стандартным отклонением этого ряда называют число

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - d)^2 + (x_2 - d)^2 + \dots + (x_n - d)^2}{n}}.$$

1. Дан ряд чисел: 11; 12; 13; 12,5; 11; 11,5; 13. Найдите их среднее арифметическое. Отметьте данные числа на числовой оси. Определите размах ряда. Определите стандартное отклонение этого ряда.
2. Дан ряд чисел: 1; 12; 23; 2; 10; 14; 22. Найдите их среднее арифметическое. Отметьте данные числа на числовой оси. Определите размах ряда. Определите стандартное отклонение этого ряда.
3. Дан ряд чисел: 11; 12; 11; 12; 13; 13; 12. Найдите их среднее арифметическое. Отметьте данные числа на числовой оси. Определите размах ряда. Определите стандартное отклонение этого ряда.
4. На числовой оси отмечены члены двух рядов (рис. 33, а, б). У какого из них стандартное отклонение больше? (Проведите вычисления и прокомментируйте их.)
5. Женя получил за четверть следующие оценки по алгебре: 2, 3, 2, 1, 4, 5, 1, 5, 3, 4, 4, 3, 5. Люда же получила оценки: 4, 1, 4, 3, 3, 4, 5, 3, 4, 4, 3, 4. Сравните средние арифметические их оценок. Определите размах каждого ряда. Кто учится ровнее? Сравните стандартные отклонения рядов оценок у Жени и Люды.

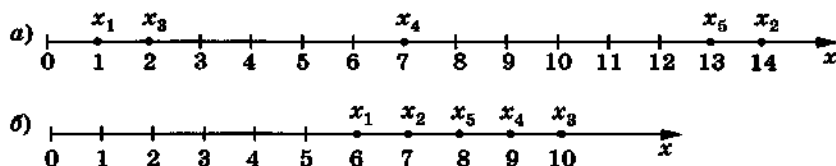


Рис. 33

6. Измеряли, сколько времени тратит каждый рабочий мастерской на изготовление детали. Были получены следующие данные (в мин): 4, 5, 5, 7, 4, 6, 4.

а) Определите среднее время, затрачиваемое рабочими на изготовление детали.

б) Определите величину стандартного отклонения полученного числового ряда.

в) Каков процент рабочих, у которых затрачиваемое время отличается от среднего больше чем на величину стандартного отклонения? больше чем на удвоенную величину стандартного отклонения?

7. В таблице приведен рост учеников 1 класса.

Фамилия	Рост, см	Фамилия	Рост, см
1. Андреев	130	6. Евдокимов	130
2. Борисов	128	7. Евсеев	150
3. Васильев	122	8. Иванов	125
4. Григорьев	132	9. Константинов	125
5. Дмитриев	133	10. Львов	125

а) Определите средний рост учеников этого класса.

б) Определите величину стандартного отклонения.

в) Каков процент учащихся, у которых рост отличается от среднего больше чем на величину стандартного отклонения?

8. Приведите пример ряда чисел, стандартное отклонение у которого равно нулю. Опишите все такие ряды.

О-31. Статистическое оценивание **и прогноз**

1. В администрацию одного города поступило 500 писем о состоянии водопроводных труб. В 499 из них сообщалось, что трубы в очень плохом состоянии. Верен ли вывод, что более 99% водопроводных труб в этом городе в очень плохом состоянии?

2. Люда любит смотреть в окно. Однажды она подсчитала, что из прошедших мимо ее дома 280 человек мужчин было 145. «Так, — сказала себе Люда, — если пройдет еще 40 человек, среди них будет 21 мужчина и 19 женщин». Объясните, как рассуждала Люда. Обязательно ли ее рассуждение верно?
3. Учительница задала ученикам на лето решить 100 задач, и у каждого ученика она проверила по десять случайно выбранных задач. Оказалось, что у двоечника Жени восемь задач из выбранных десяти решено неверно. Есть ли у вас прогноз, сколько всего задач Женя решил неверно? Можно ли утверждать наверняка, что ваш прогноз точный?
4. В ходе предвыборной кампании социологами была опрошена представительная выборка избирателей — 3000 человек. Выяснилось, что 1950 человек собираются голосовать за кандидата А и лишь 1050 человек за кандидата В. Как вы считаете, сколько человек из имеющихся в этом регионе 6 миллионов избирателей проголосуют за кандидата А?
5. В одном городе установили, что из 100 тыс. девятиклассников лишь 10 тыс. читали «Пиковую даму» Пушкина. В среднестатистическом девятом классе этого города 28 человек. Сколько из них предположительно читали «Пиковую даму»?
6. В одной телевизионной программе спортивные передачи занимают четверть всего ее круглосуточного вещания. Какова вероятность попадания на спортивную передачу при случайном выборе времени просмотра данной программы?
7. В некоем городе в 2008 г. родилось 60 тыс. человек. Как вы считаете, сколько жителей этого города родилось в январе?

8. В квадратной мишени $ABCD$ со стороной 20 см проведен отрезок MN , параллельный стороне AD . 200 раз случайным образом выбирали точку мишени, причем 150 раз выбранная точка оказывалась лежащей внутри прямоугольника $MBCN$. Найдите длину отрезка BM .
9. Выпадение какого числа гербов наиболее вероятно при четырех бросаниях монеты?

10. В партии товара 1000 изделий. Инспектор наудачу выбрал два и увидел, что одно из них бракованное. Продавец уверяет, что весь остальной товар в порядке и инспектор случайно наткнулся на единственное бракованное изделие. Могло ли так случиться? Убедительно ли для вас объяснение продавца? Обоснуйте с помощью понятия «вероятность» свою точку зрения.

« Проверь себя!

1. Хотели провести исследование, какой актер наиболее популярен среди российских школьников. Было предложено: 1) опросить всех участников Всероссийской олимпиады по математике; 2) случайным образом отобрать 1000 девятиклассников и опросить их; 3) опросить всех московских школьников.

А. Только одна из этих выборок будет репрезентативной.

Б. Только две из этих выборок будут репрезентативными.

В. Ни одна из этих выборок не будет репрезентативной.

2. Дан ряд: 1, 3, 2, 4, 2, 3, 5, 2, 4, 2, 5, 3, 5, 5, 5, 5, 4, 2, 5, 10.

Его модой является число:

А. 2. Б. 5. В. 10.

3. На рисунке 34 изображена диаграмма частот ряда. Она соответствует ряду:

А. 10, 12, 11, 12, 10, 10, 12, 12, 10, 12, 11, 11, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11.

Б. 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 10, 10, 12, 10, 12, 10, 12, 10, 11, 10, 10, 12, 12.

В. 11, 10, 12, 12, 10, 12, 12, 12, 12, 10, 12, 10, 11, 12, 12, 10, 12, 12, 10, 12.

4. Проводили опрос, сколько раз в день в среднем жители некоего города ездят на автобусе. На ри-

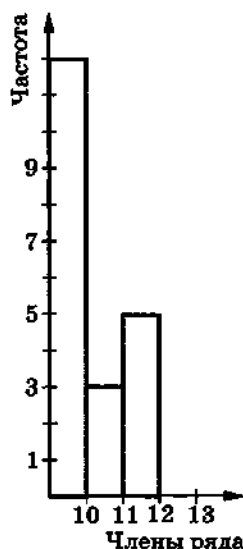


Рис. 34

сунке 35 изображен полигон, построенный по репрезентативной выборке. В городе 100 тыс. человек. Следует считать, что два раза в день на автобусе ездят:

- А. 20 тыс. человек.
- Б. 10 тыс. человек.
- В. Менее 9850 человек.

5. Женя рассматривал числовой ряд: 2, 2, 5, 4, 5, 4, 3, 1, 2, 2. После ранжирования он получил следующий ряд:

1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5. (*)

Справедливо утверждение:

- А. Существует только один числовой ряд, такой, что после ранжирования получается ряд (*).
 - Б. Ранжирование было проведено неверно.
 - В. Оба предыдущих утверждения неверны.
6. Рассматривали ряд: 11, 7, 11, 13, 5, 12, 14, 6, 7, 15. По нему хотели построить интервальный ряд с длиной интервала 2. Границами интервалов являются:
- А. 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16.
 - Б. 10, 12, 14, 16.
 - В. 5, 7, 9, 11, 13, 15.

7. На рисунке 36 изображена гистограмма частот некоего интервального ряда. Справедливо утверждение:

- А. Среднее арифметическое соответствующего числового ряда точно равно 4.
- Б. Среднее арифметическое соответствующего числового ряда не может быть равно 4.
- В. Среднее арифметическое соответствующего числового ряда может быть равно 4, но необязательно.



Рис. 35

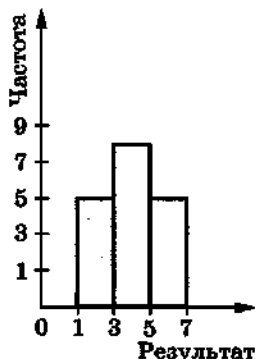


Рис. 36

8. Дан ряд: 2, 3, 5, 2, 7, 8, 5, 8. Стандартное отклонение этого ряда:
 А. Равно $\sqrt{7}$. Б. Равно $\sqrt{5,5}$. В. Не определено.
9. Справедливо утверждение:
 А. Если у двух рядов одинаковы средние арифметические, то одинаковы и стандартные отклонения.
 Б. Если у двух рядов одинаковы размахи, то одинаковы и стандартные отклонения.
 В. Оба предыдущих утверждения неверны.
10. Вова заметил, что художественные фильмы занимают половину времени вещания его любимого телеканала. То событие, что, включив любимый телеканал два раза, он ни разу не попадет на художественный фильм:
 А. Невозможно.
 Б. Возможно, но не очень вероятно.
 В. Наиболее вероятно.

• В Б Б А Б А В Б В Б

Раздел II. ПРОВЕРОЧНЫЕ РАБОТЫ

Глава 1. Неравенства

П-1. Действительные числа

Вариант 1

1. Найдите значения данного выражения и запишите их в порядке возрастания:

а) $\frac{2}{3} \cdot 0,6 - 0,6$; б) $-2^2 + \sqrt{(-2)^2}$; в) $\sqrt{50} - \sqrt{5}$.

2. Решите уравнение и подчеркните иррациональные корни уравнения:

а) $(2x + 7)(x - \sqrt{5}) = 0$; б) $x^2 = 3$.

Вариант 2

1. Найдите значения данного выражения и запишите их в порядке возрастания:

а) $\frac{3}{7} \cdot 0,7 - 0,7$; б) $-3^2 + \sqrt{(-3)^2}$; в) $\sqrt{18} - \sqrt{8}$.

2. Решите уравнение и подчеркните иррациональные корни уравнения:

а) $(7x - 2)(x + \sqrt{3}) = 0$; б) $x^2 = 5$.

П-2. Действительные числа

Вариант 1

Найдите значение выражения при данных значениях переменных. Подчеркните отрицательный ответ:

1) $\frac{3a^2 - 2b^2}{a - b}$ при $a = 3,4$, $b = -5,4$;

2) $\frac{9x^2 - 6x + 1}{1 - 3x}$ при $x = -\frac{2}{3}$;

3) $\sqrt{a - 2b}$ при $a = 7$, $b = -2,5$.

Вариант 2

Найдите значение выражения при данных значениях переменной. Подчеркните отрицательный ответ:

1) $\frac{2m^2 - 2n^2}{m - n}$ при $m = 2,7$, $n = -4,7$;

2) $\frac{4a^2 - 4a + 1}{1 - 2a}$ при $a = -3,5$;

3) $\sqrt{x - 3y}$ при $x = 4$, $y = -\frac{2}{3}$.

П-3. Действительные числа

Вариант 1

Найдите x по рисунку 37, a —г и ответьте, рациональным или иррациональным числом является найденное значение x :

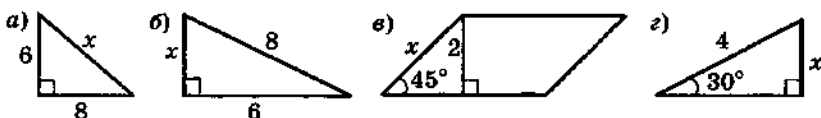


Рис. 37

Вариант 2

Найдите x по рисунку 38, a —г и ответьте, рациональным или иррациональным числом является найденное значение x :

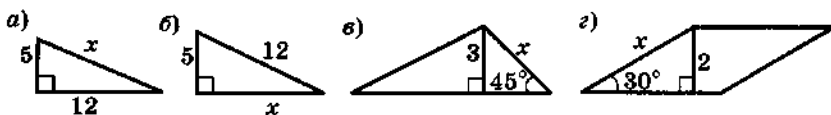


Рис. 38

П-4. Изображение действительных чисел на координатной прямой

Вариант 1

Изобразите на координатной прямой указанный промежуток и те из чисел, которые принадлежат этому промежутку:

$$1) [-3; 5]; -3\frac{2}{17}, \sqrt{18}, -\sqrt{9}, \sqrt{25}, 0, 4\frac{2}{3};$$

$$2) [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]; -3, -2, 0, 2, \sqrt{3}, \sqrt{49-36}.$$

Вариант 2

Изобразите на координатной прямой указанный промежуток и те из чисел, которые принадлежат этому промежутку:

$$1) [-5; 3]; -4\frac{2}{3}, 0, -\sqrt{25}, \sqrt{9}, -\sqrt{18}, 3\frac{2}{17};$$

$$2) [-\sqrt{7}; \sqrt{7}]; -3, -2, 0, 6, \sqrt{5}, \sqrt{64-49}.$$

П-5. Сравнение чисел

Вариант 1

Поставьте вместо многоточия знак $<$, $>$ или $=$ между числами:

$$1) -2,5 \dots -2,67; \quad 4) -\sqrt{5} \dots -\sqrt{1^2+2^2};$$

$$2) \frac{3}{101} \dots 0,03; \quad 5) -2^2 \dots 4;$$

$$3) \frac{\sqrt{2}}{2} \dots 1; \quad 6) \sqrt{7^2+8^2} \dots 7+8.$$

Вариант 2

Поставьте вместо многоточия знак $<$, $>$ или $=$ между числами:

$$1) 0,007 \dots \frac{7}{999}; \quad 4) -\sqrt{1^2+4^2} \dots -\sqrt{17};$$

$$2) -3,26 \dots -3,3; \quad 5) 9 \dots -3^2;$$

$$3) \frac{\sqrt{3}}{3} \dots 1; \quad 6) \sqrt{17^2-13^2} \dots 17-13.$$

П-6. Свойства неравенств

Вариант 1

1. Неравенства $\frac{4}{37} < \frac{1}{9}$ и $\frac{1}{9} < \frac{2}{17}$ верные. Поставьте вместо многоточия знак $<$ или $>$ между числами:

а) $\frac{4}{37} \dots \frac{2}{17}$;

в) $\frac{2}{17} \cdot 3,5 \dots \frac{4}{37} \cdot 3,5$;

б) $\frac{4}{37} - 2,67 \dots \frac{1}{9} - 2,67$;

г) $\frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{3}{19}\right) \dots \frac{2}{17} \cdot \left(-\frac{3}{19}\right)$.

2. Дано: $a > 2$ и $b < 3$. Поставьте вместо многоточия знак $<$ или $>$ так, чтобы получилось верное неравенство:

а) $a + 2,5 \dots 4,5$; б) $\frac{2}{7}a \dots \frac{4}{7}$; в) $-b \dots -3$; г) $a - b \dots -1$.

Вариант 2

1. Неравенства $\frac{4}{37} < \frac{1}{9}$ и $\frac{1}{9} < \frac{2}{17}$ верные. Поставьте вместо многоточия знак $<$ или $>$ между числами:

а) $\frac{2}{17} \dots \frac{4}{37}$;

в) $\frac{4}{37} \cdot 2,7 \dots \frac{2}{17} \cdot 2,7$;

б) $\frac{1}{9} - 3,25 \dots \frac{2}{17} - 3,25$;

г) $\frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{5}{23}\right) \dots \frac{4}{37} \cdot \left(-\frac{5}{23}\right)$.

2. Дано: $a > 2$ и $b < 3$. Поставьте вместо многоточия знак $<$ или $>$ так, чтобы получилось верное неравенство:

а) $b - 2,5 \dots 0,5$; б) $\frac{3}{7}b \dots \frac{9}{7}$; в) $-a \dots -2$; г) $b - a \dots 1$.

П-7. Решение линейных неравенств

Вариант 1

1. Является ли число (-2) решением неравенства:
 а) $2 - x > 3$; в) $5t < -t^2$;
 б) $x^2 + 2,3 < 0$; г) $|y| < 1$?
2. Докажите, что одно из неравенств не имеет решений, а решением другого является любое действительное число:
 а) $x^2 > -3$; б) $y^2 - 6y + 9 < 0$.

Вариант 2

1. Является ли число (-2) решением неравенства:
 а) $3 - x < 4$; в) $6x < -x^2$;
 б) $x^2 + 3,8 < 0$; г) $|y| < 3$?

2. Докажите, что одно из неравенств не имеет решений, а решением другого является любое действительное число:

а) $y^2 > -5$;

б) $x^2 - 10x + 25 < 0$.

П-8. Решение линейных неравенств

Решите неравенство и укажите по два его решения: одно рациональное, а другое иррациональное:

Вариант 1

1) $x - 7 > -8$;

2) $8 - x \geq 7$;

3) $\frac{1}{2}t < 3$;

4) $-6z < 2$;

5) $4 - 2y \leq 7 - y$.

Вариант 2

1) $x - 3 < -4$;

2) $4 - t \leq 3$;

3) $\frac{1}{3}z > 2$;

4) $-6x \geq 3$;

5) $5 - 3y > 8 - 2y$.

П-9. Решение линейных неравенств

Вариант 1

Решите неравенство:

1) $10 - 7(x - 2) < 4x + 2(3x - 5)$;

2) $\frac{y}{3} - 1 \leq \frac{y}{2}$;

3) $\frac{x-5}{2} - \frac{2x-3}{2} \leq 3x - 1$;

4) $(t-1)(t-2) \leq (t+1)^2$;

5) $1 - 2y > -2(y - 5)$.

Вариант 2

Решите неравенство:

1) $4x + 7(x - 2) < 10 - 2(3x - 5)$;

2) $\frac{t}{3} - 1 \leq \frac{t}{4}$;

3) $1 - \frac{5-x}{2} \geq 3x + \frac{2x-3}{5}$;

4) $(t-1)^2 \geq (t-4)(t-3)$;

5) $1 - 3y < -3(y - 2)$.

П-10. Решение линейных неравенств

Вариант 1

Решите неравенство и укажите, какие из чисел $-5, 6; \sqrt{35}; 60; 0; \frac{\sqrt{7}}{2}$ являются его решениями:

- 1) $5 - (2x - 3) \leq -4 - (1 + x);$
- 2) $(3t - 5)(t + 2) - (t - 3)(t + 3) < 2(t - 4)^2 + 1.$

Вариант 2

Решите неравенство и укажите, какие из чисел $-5, 6; \sqrt{35}; 60; 0; \frac{\sqrt{7}}{2}$ являются его решениями:

- 1) $4 - (2x - 3) \geq -5 - (1 + x);$
- 2) $(3y - 2)(y + 5) - (y - 4)(y + 4) > 2(y - 3)^2 + 13.$

П-11. Решение линейных неравенств

Вариант 1

При каких значениях переменной значение первого из выражений:

- 1) не больше значения второго: $5 - x$ и $\frac{1 - 3x}{2};$
- 2) больше значения второго: $y^2 - 2(y - 4)$ и $(y - 1)^2?$

Вариант 2

При каких значениях переменной значение первого из выражений:

- 1) не меньше значения второго: $7 - 2t$ и $\frac{1 - 3t}{2};$
- 2) меньше значения второго: $x^2 - 2(x + 1)$ и $(x - 1)^2?$

П-12. Решение систем линейных неравенств

Вариант 1

Изобразите на координатной прямой решение каждого из неравенств и отметьте штриховкой решение системы. Запишите ответ:

- 1) $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 1 \\ x \geq -2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \geq 1 \\ x < -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x < 1 \\ x \geq -2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 1. \end{cases}$

Вариант 2

Изобразите на координатной прямой решение каждого из неравенств и отметьте штриховкой решение системы. Запишите ответ:

- 1) $\begin{cases} x \leq -2 \\ x \leq 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > -2 \\ x \geq 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x < -2 \\ x \geq 1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq -2. \end{cases}$

П-13. Решение систем неравенств

Вариант 1

Решите систему неравенств и множество решений изобразите на координатной прямой:

- 1) $\begin{cases} 2 - 3x < 4x - 12 \\ 7 + 3x \geq 2x + 10; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -5x < 10 \\ (x - 3)(x + 3) < (x - 4)^2. \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} 1 - \frac{x}{2} > x - \frac{1}{3} \\ 1 - (2x - 3) \leq x - (5x - 4); \end{cases}$

Вариант 2

Решите систему неравенств и множество решений изобразите на координатной прямой:

- 1) $\begin{cases} 3x + 12 > 4x - 1 \\ 7 - 2x \leq 10 - 3x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -6x < 12 \\ (x - 3)^2 > (x + 4)(x - 4). \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{x}{2} < x - 1 \\ x - (3 - 2x) \leq 1 - (4 - 5x); \end{cases}$

П-14. Решение двойных неравенств

Решите неравенство:

Вариант 1

- 1) $2 < x + 3 \leq 4;$
2) $2 \leq 7 - x \leq 4;$
3) $-2 < -2x < 4;$
4) $-3 \leq 2x - 1 < 5;$
5) $-1 < \frac{x-1}{3} \leq 2.$

Вариант 2

- 1) $2 \leq x - 3 \leq 4;$
2) $2 \leq 6 - x \leq 4;$
3) $-4 < -2x < 2;$
4) $-5 \leq 2x - 1 < 3;$
5) $-2 < \frac{x-1}{3} \leq 1.$

П-15. Доказательство неравенств

Вариант 1

1. Сравните числа a и b , если:
а) $a - b = -3,2$; б) $a - b = -2 \cdot 3^2$; в) $a - b = \sqrt{13} - 2\sqrt{3}$.
2. Докажите, что неравенство верно при любых значениях переменных, составив разность между его левой и правой частями:
а) $(3a - 2)(a + 1) > a - 3$; б) $25a^2 + c^2 \geq 10ac$.

Вариант 2

1. Сравните числа a и b , если:
а) $a - b = 2,3$; б) $a - b = -2^2 \cdot 3$; в) $a - b = 2\sqrt{5} - \sqrt{19}$.
2. Докажите, что неравенство верно при любых значениях переменных, составив разность между его левой и правой частями:
а) $(2x - 5)(x - 1) > -7x - 6$; б) $36a^2 + m^2 \geq 12am$.

П-16. «С точностью до...»

Вариант 1

1. Замените равенство двойным неравенством:
а) $x = 26 \pm 0,6$; б) $a = 2,6 \pm 0,6$; в) $c = 1050 \pm 0,6$.
2. Запишите интервал в виде $a \pm h$:
а) $10 \leq a \leq 14$; б) $10,2 \leq a \leq 13,2$; в) $3,87 \leq a \leq 3,89$.

Вариант 2

1. Запишите выражение в виде двойного неравенства:
а) $y = 34 \pm 0,4$; б) $b = 3,4 \pm 0,4$; в) $d = 1020 \pm 0,4$.
2. Запишите интервал в виде $a \pm h$:
а) $20 \leq a \leq 24$; б) $11,2 \leq a \leq 14,2$; в) $15,37 \leq a \leq 15,39$.

П-17. Измерение «с точностью до...»

Вариант 1

1. Результат измерения длины l веревки выражен так: 6,28 м с точностью до 0,5 см. Верно ли, что $l \approx 6,28$ м?
2. $\sqrt{2} = 1,4142\dots$. Верно ли, что $\sqrt{2} \approx 1,41$?

Вариант 2

1. Результат измерения длины l веревки выражен так: 6,43 м с точностью до 0,5 см. Верно ли, что $l \approx 6,43$ м?
2. $\sqrt{3} = 1,7320\dots$. Верно ли, что $\sqrt{3} \approx 1,73$?

Глава 2. Квадратичная функция

П-18. Какую функцию называют квадратичной

Вариант 1

1. Какая из функций является квадратичной:
а) $y = 3x - x^2$; в) $y = -3x + 5$;
б) $y = 2x^2 + x^3$; г) $y = \frac{5}{x+2} - x$?
2. На рисунке 39 изображен график квадратичной функции $y = f(x)$ на отрезке $[-6; -1]$.
а) Дорисуйте график этой функции на отрезке $[-1; 2]$.
б) Укажите значения $f(0)$, $f(2)$.
в) Укажите наименьшее значение функции на всей числовой оси.
г) Укажите координаты вершины параболы, являющейся графиком этой функции.
д) Укажите ось симметрии этой параболы.
- 3*. Известно, что прямая $x = 2$ — ось симметрии графика квадратичной функции $y = f(x)$, этот график проходит через точку $A(1; 3)$. Найдите корни уравнения $f(x) = 3$.

Вариант 2

1. Какая из функций является квадратичной:
а) $y = -5x + x^2$;
б) $y = 0,2x^2 + 2x^3$;
в) $y = -x^2 - 1$;
г) $y = \frac{2}{x-3} + x$?

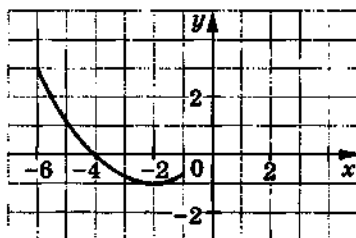


Рис. 39

2. На рисунке 40 изображен график квадратичной функции $y=f(x)$ на отрезке $[1; 6]$.

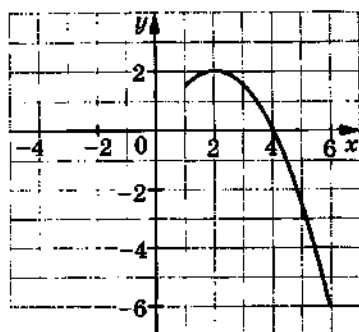


Рис. 40

- а) Дорисуйте график этой функции на отрезке $[-2; 1]$.
 б) Укажите значения $f(0)$, $f(-2)$.
 в) Укажите наибольшее значение функции на всей числовой оси.
 г) Укажите координаты вершины параболы, являющейся графиком функции.
 д) Укажите ось симметрии этой параболы.
- 3*. Известно, что прямая $x=-3$ — ось симметрии графика квадратичной функции $y=f(x)$, этот график проходит через точку $A(-1; 2)$. Найдите корни уравнения $f(x)=2$.

П-19. График и свойства функции $y=ax^2$

Вариант 1

1. Дана функция $y = \frac{1}{5}x^2$?
- а) Постройте ее график на отрезке $[-5; 5]$.
 б) Проходит ли этот график через точку $A(0,1; 0,002)$?
 в) Укажите координаты точек пересечения этого графика с прямой $y = \frac{1}{5}$.
 г) Найдите наибольшее и наименьшее значения данной функции на отрезке $[-5; 5]$.
2. Постройте график функции $y = \begin{cases} \frac{1}{5}x^2 & \text{при } x \geq 0 \\ -2x^2 & \text{при } x < 0. \end{cases}$
- Укажите промежутки возрастания и убывания этой функции.
- 3*. Приведите пример какой-нибудь точки графика функции $y = \frac{1}{5}x^2$, лежащей выше прямой $y=5$.

Вариант 2

1. Дана функция $y = -\frac{1}{4}x^2$.

а) Постройте ее график на отрезке $[-4; 4]$.

б) Проходит ли этот график через точку $A(0,1; 0,0025)$?

в) Укажите координаты точек пересечения этого графика с прямой $y = -\frac{1}{4}$.

г) Найдите наибольшее и наименьшее значения данной функции на отрезке $[-4; 4]$.

2. Постройте график функции $y = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 & \text{при } x < 0 \\ 3x^2 & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$

Укажите промежутки возрастания и убывания этой функции.

- 3*. Приведите пример какой-нибудь точки графика функции $y = -\frac{1}{4}x^2$, лежащей ниже прямой $y = -4$.

П-20. Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат

Вариант 1

1. Постройте график функции:

а) $y = 4x^2$; б) $y = -\frac{1}{2}(x+3)^2$; в) $y = 3(x-2)^2 - 1$.

- 2*. Определите множество значений функции

$$y = \begin{cases} -4 & \text{при } x > 0 \\ -2(x-1)^2 - 2 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Постройте график функции:

а) $y = \frac{1}{4}x^2$; б) $y = -3(x-2)^2$; в) $y = 4(x+2)^2 - 3$.

- 2*. Определите множество значений функции

$$y = \begin{cases} -2 & \text{при } x > 0 \\ -(x-1)^2 - 1 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

П-21. График функции $y = ax^2 + bx + c$

Вариант 1

1. Постройте график функции $y = 2x^2 - 5x + 3$. Укажите (с его помощью, если нужно):
- а) координаты точек пересечения графика функции с осями координат;
 - б) ось симметрии графика;
 - в) наименьшее значение функции;
 - г) значения x , при которых функция принимает значения, большие 0;
 - д) промежутки возрастания и убывания функции.
- 2*. График функции $y = -0,5(x-1)(x-a)$ проходит через точку $A(2; 1)$.
- а) Найдите число a .
 - б) Постройте график данной функции.

Вариант 2

1. Постройте график функции $y = -0,5x^2 + 3x + 8$. Укажите (с его помощью, если нужно):
- а) координаты точек пересечения графика функции с осями координат;
 - б) ось симметрии графика;
 - в) наименьшее значение функции;
 - г) значения x , при которых функция принимает значения, большие 0;
 - д) промежутки возрастания и убывания функции.
- 2*. График функции $y = 2(x+1)(x-a)$ проходит через точку $A(-2; 6)$.
- а) Найдите число a .
 - б) Постройте график данной функции.

П-22. Квадратные неравенства

Вариант 1

1. Решите неравенство:
- а) $x^2 - 12x + 27 \leq 0$;
 - б) $3x - 6x^2 > 0$;
 - в) $2x^2 - x + 5 > 0$;
 - г) $2x^2 \geq 32$;
 - д) $x^2 + 3x > 10$.
- 2*. Найдите все целые решения неравенства $(x-1)(x-5) \leq 0$.

Вариант 2

1. Решите неравенство:

а) $x^2 - 16x + 48 > 0$;

г) $3x^2 \geq 27$;

б) $2x - 4x^2 \leq 0$;

д) $x^2 + 5x \geq 14$.

в) $x - 0,5x^2 - 10 < 0$;

2*. Найдите все целые решения неравенства $(x+1)(5-x) > 0$.

Глава 3. Уравнения и системы уравнений

П-23. Вычисление значений выражений

Вариант 1

Найдите значение выражения:

1) $-2a + 3$ при $a = 1,4$;

2) $-m^2 + 5$ при $m = 3$;

3) $9 - 6c + c^2$ при $c = 3,1$;

4) $a^2 - b^2$ при $a = 8,4$, $b = 1,6$.

Вариант 2

Найдите значение выражения:

1) $-3a + 2$ при $a = 1,2$;

2) $-m^2 + 7$ при $m = 4$;

3) $25 - 10c + c^2$ при $c = 5,1$;

4) $m^2 - n^2$ при $m = 17,8$, $n = 7,8$.

П-24. Область определения выражения

Найдите область определения выражения:

Вариант 1

1) $3a^3 + 5a^2$;

2) $6p^{-1}$;

3) $\frac{4}{2a+3}$;

4) $\frac{5}{x^2-4x}$;

5) $\frac{-2x+10}{x^3-5x^2}$.

Вариант 2

1) $5a^3 - 3a^2$;

2) $9m^{-2}$;

3) $\frac{-1}{3a+2}$;

4) $\frac{6}{y^2-2y}$;

5) $\frac{-3x+21}{x^3-7x^2}$.

П-25. Тождественные выражения

Замените выражение тождественно равным ему выражением:

Вариант 1

1) $a^2 + 64 - 8a$;

2) $121 - b^2$;

3) $\frac{x-3}{9-x^2}$;

4) $(a-5)(a+2) - a(a-7)$;

5) $\frac{6-x-x^2}{x-2}$.

Вариант 2

1) $x^2 + 36 - 12x$;

2) $144 - m^2$;

3) $\frac{a-4}{16-a^2}$;

4) $(m-7)(m+2) - m(m+8)$;

5) $\frac{8+2x-x^2}{x-4}$.

П-26. Упрощение выражений

Упростите выражение:

Вариант 1

1) $\frac{35c^3n^5}{39a^7x^2}; \frac{49c^3n^5}{26a^5x^3}$;

2) $\frac{1}{a-b} - \frac{2}{b-a}$;

3) $\frac{-2x^2+3x-1}{x-1}$.

Вариант 2

1) $\frac{15a^3b^6}{32c^4m^5}; \frac{25ab^2}{64m^2c^4}$;

2) $\frac{2}{m-n} - \frac{3}{n-m}$;

3) $\frac{-3x^2+2x+1}{x-1}$.

П-27. Упрощение выражений

Вариант 1

Упростите выражение:

1) $(xy^{-1} - x^{-1}y)xy + 2y^2$;

2) $\frac{1}{3}(3x^3 - 6x^2y + 3xy^2) \cdot (y-x)^{-3}$.

Вариант 2

Упростите выражение:

1) $2a^2 - ab \cdot (ab^{-1} - a^{-1}b)$;

2) $\frac{1}{5}(a-b)^{-3} \cdot (5b^3 - 10ab^2 + 5a^2b)$.

П-28. Целые уравнения

Решите уравнение:

Вариант 1

1) $3x - 9 = 8x - 1$;

2) $\frac{7-y}{2} = \frac{1+y}{3} - 1$;

3) $\frac{x^2-x}{5} - \frac{3x-1}{2} = x - 8$;

4) $(x^2 - 4)(2x + 1)(1 - x) = 0$;

5) $x(x - 2) = 3(x - 2)$.

Вариант 2

1) $4y - 5 = 9y - 2$;

2) $\frac{8-x}{2} = \frac{x}{3} - 1$;

3) $\frac{x^2+x}{5} - \frac{3x-5}{2} = x - 4$;

4) $(9 - x^2)(2x - 1)(x + 1) = 0$;

5) $x(x - 3) = 2(x - 3)$.

П-29. Дробные уравнения

Решите уравнение:

Вариант 1

1) $\frac{6}{y-1} + 2 = y - \frac{2y+4}{1-y}$;

2) $\frac{x-2}{x+1} - \frac{x+6}{x-2} = 1$;

3) $\frac{z^3-4z}{2-z} = 0$.

Вариант 2

1) $\frac{(y-1)^2}{y-3} + \frac{2y-2}{3-y} = 5$;

2) $\frac{2x-2}{x+1} + 10 = \frac{5}{x}$;

3) $\frac{4z^3-z}{1-2z} = 0$.

П-30. Дробные уравнения

Вариант 1

1. Найдите значения выражения $\frac{3a-4}{a+2} - \frac{12}{a}$ при $a = 2$;
 $a = -3$.

Существуют ли значения a , при которых значение данного выражения равно -3 ?

2. При каких значениях y сумма дробей $\frac{12}{y-3}$ и $\frac{3-y}{3}$ равна дроби $\frac{y-9}{3-y}$?

Вариант 2

1. Найдите значения выражения $\frac{5c-8}{c+4} - \frac{12}{c}$ при $c=2$; $c=-3$.

Существуют ли значения c , при которых значение данного выражения равно -3 ?

2. При каких значениях t сумма дробей $\frac{9-t}{t-3}$ и $\frac{t-3}{3}$ равна дроби $\frac{12}{3-t}$?

П-31. Решение задач

Вариант 1

1. Первый лыжник расстояние 40 км преодолел за такое же время, за которое второй преодолел 48 км, так как его скорость была на 2 км/ч меньше, чем у второго. Какова скорость первого лыжника?
2. Составьте уравнение, у которого три разных корня, но один из них 10.

Вариант 2

1. Для упаковки 100 учебников понадобилось столько же коробок, сколько нужно для упаковки 130 задачников, так как в одной коробке учебников помещается на три штуки меньше, чем задачников. Сколько учебников помещается в одной коробке?
2. Составьте уравнение, у которого три разных корня, но один из них 100.

П-32. Решение задач

Вариант 1

1. По течению реки катер прошел 21 км, а против течения — 10 км, затратив на весь путь 2,5 ч. Скорость течения 2 км/ч. Какова собственная скорость катера?
2. Найдите больший корень уравнения $(x^2-7)(2x-5)=0$.

Вариант 2

1. По течению реки катер прошел 70 км, а против течения — 35 км, причем на путь по течению он затратил на $1\frac{1}{2}$ ч больше, чем на путь против течения. Чему

равна собственной скорости катера, если скорость течения реки 2 км/ч?

2. Найдите меньший корень уравнения $(x^2 - 11)(2x + 7) = 0$.

П-33. Решение задач

Вариант 1

1. Составьте уравнение к задаче:
Поезд был задержан на станции А на 5 мин, и, чтобы прибыть на станцию В, находящуюся в 20 км от станции А, он увеличил скорость на 20 км/ч.
С какой скоростью шел поезд от станции А до станции В?
2. Решите неравенство $\frac{2 - \sqrt{5}}{2x - 8} \leq 0$ и укажите наименьшее целое число, являющееся его решением.

Вариант 2

1. Составьте уравнение к задаче:
Миша рассчитал, что если он отправится в путь на 15 мин раньше, чем собирался, то для того, чтобы прибыть на место встречи с другом в намеченное время, он может снизить скорость на 1 км/ч. С какой скоростью шел Миша, если расстояние от дома до места встречи 5 км?
2. Решите неравенство $\frac{1 - \sqrt{7}}{2x - 10} \geq 0$ и укажите наибольшее целое число, являющееся его решением.

П-34. Системы уравнений **с двумя переменными**

Вариант 1

1. Решите систему уравнений:
- а) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y = 4 \\ 2y - x = 7. \end{cases}$
2. Является ли пара чисел (4; -2) решением системы $\begin{cases} x + y = 2 \\ \sqrt{x} = y? \end{cases}$

Вариант 2

1. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x - y = 2 \\ 5x + y = 16; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 - y = 5 \\ 2y + x = 11. \end{cases}$$

2. Является ли пара чисел (9; -3) решением системы

$$\begin{cases} x - y = 12 \\ \sqrt{x} = y? \end{cases}$$

П-35. Системы уравнений **с двумя переменными**

Вариант 1

- Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} (x - 3)(y + 2) = 0 \\ 2x - 3y = 9; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 - 3xy - y^2 = 9 \\ x - 2y = 4. \end{cases}$$

Вариант 2

- Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} (x + 3)(y - 2) = 0 \\ 3x - 2y = 9; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 7 \\ x - 3y = 5. \end{cases}$$

П-36. Решение задач **с помощью систем уравнений**

Вариант 1

1. Сумма двух положительных чисел равна 7. Если от их произведения отнять квадрат большего из них, то получится -15. Найдите эти числа.
2. Проверьте (устно), что пара чисел (3; -2) является решением системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y = 1. \end{cases}$

Найдите еще одну пару чисел, являющуюся решением этой системы.

Вариант 2

1. Разность двух положительных чисел равна 2. Если от квадрата большего из них отнять произведение этих чисел, то получится 8. Найдите эти числа.
2. Проверьте (устно), что пара чисел $(-2; 4)$ является решением системы
$$\begin{cases} xy = -8 \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$$

Найдите еще одну пару чисел, которая является решением этой системы.

П-37. Решение задач **с помощью систем уравнений**

Вариант 1

1. Периметр прямоугольника 20 см, а его площадь равна площади квадрата со стороной 4 см. Найдите длины сторон прямоугольника.
2. Составьте систему уравнений для нахождения x и y (рис. 41), если известно, что $P_{ABC} = 30$ см.

Вариант 2

1. Периметр прямоугольника 20 см, а его площадь равна площади квадрата со стороной 3 см. Найдите длины сторон прямоугольника.
2. Составьте систему уравнений для нахождения x и y (рис. 42), если известно, что $S_{ABC} = 60$ см².

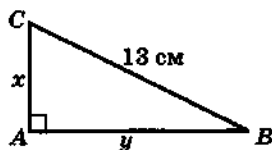


Рис. 41

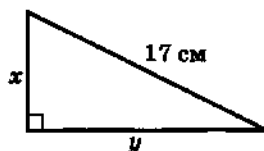


Рис. 42

П-38. Решение задач с помощью систем уравнений

Вариант 1

Из двух пунктов, расстояние между которыми 9 км, одновременно вышли навстречу друг другу две группы туристов и встретились через 1 ч. Какова скорость каждой группы, если на прохождение всего пути одной группе потребовалось на 27 мин меньше, чем другой?

Вариант 2

Из двух пунктов, расстояние между которыми 8 км, вышли одновременно навстречу друг другу две группы туристов и встретились через 1 ч. Какова скорость каждой группы, если на прохождение всего пути одной группе потребовалось на 1 ч 4 мин больше, чем другой?

П-39. Графическое решение уравнений

Вариант 1

1) Задайте гиперболу уравнением вида $y = \frac{k}{x}$, определив коэффициент k по данным рисунка 43.

2) Задайте прямую уравнением вида $y = kx + b$, определив коэффициенты по данным рисунка 43.

3) Запишите уравнение, которое можно решить с помощью этих графиков. Укажите его корни.

4) Запишите систему уравнений, которую можно решить с помощью этих графиков. Укажите решения этой системы.

Вариант 2

1) Задайте гиперболу уравнением вида $y = \frac{k}{x}$, определив коэффициент k по данным рисунка 44.

2) Задайте прямую уравнением вида $y = kx + b$, определив коэффициенты по данным рисунка 44.

3) Запишите уравнение, которое можно решить с помощью этих графиков. Укажите его корни.

4) Запишите систему уравнений, которую можно решить с помощью этих графиков. Укажите решения этой системы.

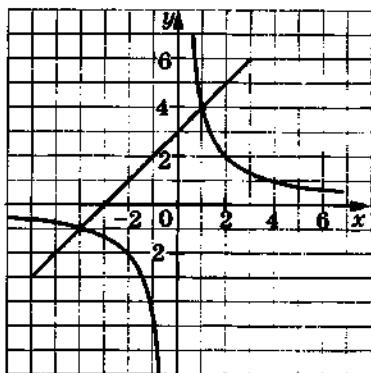


Рис. 43

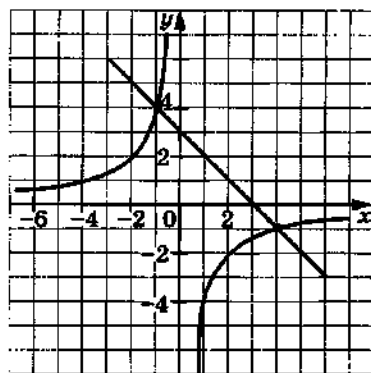


Рис. 44

П-40. Графическое решение уравнений

Вариант 1

1. Решите графически уравнение $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^2 - 6$.
2. Используя эскизы графиков левой и правой частей уравнения $x^3 = x + 1000$, определите, сколько решений оно имеет.

Вариант 2

1. Решите графически уравнение $\sqrt{x} = \frac{1}{4}x^2 - 2$.
2. Используя эскизы графиков левой и правой частей уравнения $x^3 = x - 1000$, определите, сколько решений оно имеет.

П-41. Графическое решение систем уравнений

Вариант 1

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3: \end{cases}$$

а) графически; б) алгебраически.

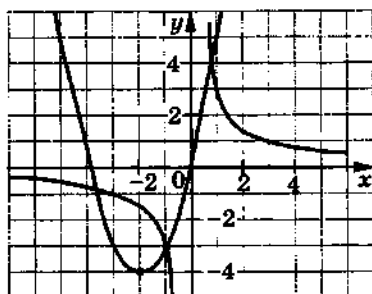


Рис. 45

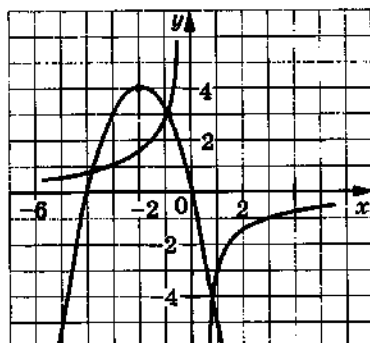


Рис. 46

2. Найдите решения уравнения $\frac{3}{x} = x^2 + 4x$ с помощью графиков (рис. 45). Запишите их приближенные значения с одним знаком после запятой.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$
 а) графически; б) алгебраически.
2. Найдите решения уравнения $-\frac{3}{x} = 3 - 2x - x^2$ с помощью графиков (рис. 46). Запишите их приближенные значения с одним знаком после запятой.

Глава 4. Арифметическая и геометрическая прогрессии

П-42. Числовые последовательности

Вариант 1

1. Последовательность (v_n) задана рекуррентно: $v_1 = 5$, $v_n = v_{n-1} - 1$.
 а) Выпишите первые пять членов этой последовательности.
 б) Есть ли в этой последовательности отрицательные числа? Если да, то укажите номер какого-нибудь из них.

2. Последовательность задана формулой n -го члена:

$$a_n = n^2 - 1.$$

- а) Выпишите первые пять ее членов.
б) Содержится ли в этой последовательности число 35? Если да, то укажите его номер.
в)* Запишите выражение для члена a_{n+1} .

Вариант 2

1. Последовательность (t_n) задана рекуррентно: $t_1 = -10$, $t_n = t_{n-1} + 2$.

- а) Выпишите первые пять членов этой последовательности.
б) Есть ли в этой последовательности положительные числа? Если да, то укажите номер какого-нибудь из них.

2. Последовательность задана формулой n -го члена:

$$b_n = n^2 + 1.$$

- а) Выпишите первые пять ее членов.
б) Содержится ли в этой последовательности число 50? Если да, то укажите его номер.
в)* Запишите выражение для члена b_{n+1} .

П-43. Арифметическая прогрессия

Вариант 1

Дана арифметическая прогрессия $-15, -12, \dots$

- а) Определите ее разность.
б) Запишите формулу n -го члена этой прогрессии.
в) Выясните, содержится ли в этой прогрессии число 12 и если да, то под каким номером.
г) Определите, сколько в этой прогрессии отрицательных членов.

д)* Рассматривается такая последовательность (x_n) , что каждый ее член на 2000 больше, чем член данной последовательности с тем же номером. Докажите, что последовательность (x_n) является арифметической прогрессией.

Вариант 2

Дана арифметическая прогрессия $24, 18, \dots$

- а) Определите ее разность.
б) Запишите формулу n -го члена этой прогрессии.
в) Выясните, содержится ли в этой прогрессии число -24 и если да, то под каким номером.

г) Определите, сколько в этой прогрессии положительных членов.

д)* Рассматривается такая последовательность (y_n) , что каждый ее член на 2000 меньше, чем член данной последовательности с тем же номером. Докажите, что последовательность (y_n) является арифметической прогрессией.

П-44. Сумма первых n членов арифметической прогрессии

Вариант 1

1. Дана арифметическая прогрессия $-2, 3, 8, \dots$. Найдите:
- а) сумму ее первых десяти членов;
 - б) сумму ее первых n членов;
 - в) число последовательных членов этой прогрессии, которые надо сложить, начиная с первого, чтобы получить 40.
- 2*. Найдите сумму всех трехзначных чисел, кратных 4.

Вариант 2

1. Дана арифметическая прогрессия $-3, 1, 5, \dots$. Найдите:
- а) сумму ее первых десяти членов;
 - б) сумму ее первых n членов;
 - в) число последовательных членов этой прогрессии, которые надо сложить, начиная с первого, чтобы получить 42.
- 2*. Найдите сумму всех четырехзначных чисел, кратных 5.

П-45. Геометрическая прогрессия

Вариант 1

- Рассматривается геометрическая прогрессия (c_n) :
 $-3, 12, \dots$
- а) Найдите знаменатель этой прогрессии.
 - б) Найдите c_3 .
 - в) Запишите формулу n -го члена.
 - г) Найдите c_6 .

д) Объясните, является ли эта прогрессия возрастающей или убывающей.

е) Укажите другую геометрическую прогрессию, у которой члены с нечетными номерами те же, что и в данной прогрессии.

ж)* Объясните, сколько существует геометрических прогрессий, у которых члены с нечетными номерами такие, как в данной.

Вариант 2

Рассматривается геометрическая прогрессия (b_n) :
7, -14, ...

а) Найдите знаменатель этой прогрессии.

б) Найдите b_3 .

в) Запишите формулу n -го члена.

г) Найдите b_8 .

д) Объясните, является ли эта прогрессия возрастающей или убывающей.

е) Укажите другую геометрическую прогрессию, у которой члены с четными номерами те же, что и в данной прогрессии.

ж)* Объясните, сколько существует геометрических прогрессий, у которых члены с нечетными номерами такие, как в данной.

П-46. Сумма первых n членов геометрической прогрессии

Вариант 1

Рассматривается геометрическая прогрессия, заданная формулой n -го члена:

$$b_n = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

а) Найдите сумму ее первых пяти членов.

б) Найдите сумму ее первых n членов.

в)* Сколько надо сложить последовательных членов этой прогрессии, начиная с первого, чтобы получить сумму, равную $\frac{21}{2}$?

Вариант 2

Рассматривается геометрическая прогрессия, заданная формулой n -го члена:

$$c_n = 27 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

- а) Найдите сумму ее первых пяти членов.
- б) Найдите сумму ее первых n членов.
- в)* Сколько надо сложить последовательных членов этой прогрессии, начиная с первого, чтобы получить сумму, равную $\frac{61}{3}$?

П-47. Простые и сложные проценты

Вариант 1

- 1. За просроченный платеж в 3 млн р. фирма должна платить штраф в размере 5% ежемесячно от суммы платежа. Сколько должна будет выплатить фирма за трехмесячную задержку платежа?
- 2. Будем считать, что костюмы ежегодно дорожают на 50%.
 - а) Сколько будет стоить через два года костюм, стоивший изначально 5000 р.?
 - б)* Известно, что костюм стоит 3375 р. Сколько он стоил три года назад?

Вариант 2

- 1. За просроченный платеж в 5 млн р. фирма должна платить штраф в размере 10% ежемесячно от суммы платежа. Сколько должна будет выплатить фирма за четырехмесячную задержку платежа?
- 2. Будем считать, что ботинки ежегодно дорожают на 40%.
 - а) Сколько будет стоить через два года пара ботинок, стоившая изначально 2000 р.?
 - б)* Известно, что пара ботинок стоит 2744 р. Сколько она стоила три года назад?

Глава 5. Статистические исследования

П-48. Выборки

Вариант 1

Опросили учащихся одной школы, сколько раз в жизни они летали самолетом. Получили следующие данные:

Число совершенных полетов	0	1	2	3	4	5
Количество человек	420	150	280	110	32	8

а) Постройте таблицу относительных частот каждого случая для данной выборки.

б) Представьте полученные данные на столбчатой диаграмме.

в) Представьте эти данные с помощью полигона.

г) Укажите моду и среднее арифметическое полученного при опросе ряда чисел.

д) Объясните, можно ли считать указанную выборку репрезентативной для выводов обо всем населении России.

Вариант 2

Опросили садоводов одного товарищества, сколько дней в неделю в среднем они проводят весной за городом. Получили следующие данные:

Число дней, проведенных за городом	0	1	2	3	4	5
Количество человек	8	12	40	20	16	4

а) Постройте таблицу относительных частот каждого случая для данной выборки.

б) Представьте полученные данные на столбчатой диаграмме.

в) Представьте эти данные с помощью полигона.

г) Укажите моду и среднее арифметическое полученного при опросе ряда чисел.

д) Объясните, можно ли считать указанную выборку репрезентативной для выводов обо всем населении России.

П-49. Интервальные ряды

Вариант 1

Дан ряд чисел: 11, 14, 12, 11, 21, 23, 22, 16, 17, 14, 20, 11, 13, 16, 17, 18, 12, 19, 18, 11, 22, 20, 21, 22, 12.

- а) Определите его размах.
- б) Определите границы соответствующего интервального ряда с длиной интервала, равной 3.
- в) Постройте гистограмму частот для этого интервального ряда.

Вариант 2

Дан ряд чисел: 9, 10, 11, 10, 10, 20, 17, 21, 16, 12, 14, 18, 19, 17, 12, 10, 12, 20, 19, 16, 15, 15, 13, 12, 13.

- а) Определите его размах.
- б) Определите границы соответствующего интервального ряда с длиной интервала, равной 3.
- в) Постройте гистограмму частот для этого интервального ряда.

П-50. Стандартное отклонение

Вариант 1

Дан ряд чисел: 1, 2, 6, 6, 10, 5, 2, 4.

- а) Определите его среднее арифметическое значение.
- б) Определите размах ряда.
- в) Определите стандартное отклонение ряда.

Вариант 2

Дан ряд чисел: 2, 2, 11, 13, 7, 10, 4, 7, 7.

- а) Определите его среднее арифметическое значение.
- б) Определите размах ряда.
- в) Определите стандартное отклонение ряда.

П-51. Статистическое оценивание и прогноз

Вариант 1

1. Опрос репрезентативной группы из 500 девятиклассников показал, что 250 из них предпочитают апельсиновый сок яблочному, 200 — яблочный апельсиновому, а 50 не имеют в данном случае предпочтений.

- а) Может ли так получиться, что ни одна из 10 случайно выбранных девятиклассниц не предпочитает апельсиновый сок яблочному?
- б) Какова вероятность того, что случайно выбранная девятиклассница предпочитает апельсиновый сок яблочному?
- в) Сколько девятиклассниц, предпочитающих яблочный сок апельсиновому, вы предполагали бы встретить среди случайно выбранных 300?
2. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны BC . Случайным образом 100 раз выбирают точку данного прямоугольника. Каков ваш прогноз, сколько раз выбранной окажется точка, принадлежащая треугольнику ABM ?

Вариант 2

1. Опрос репрезентативной группы из 1000 девятиклассников показал, что 800 из них предпочитает мясо рыбе, 50 — рыбу мясу, а 150 не имеют в данном случае предпочтений.
- а) Может ли так получиться, что ни один из 20 случайно выбранных девятиклассников не предпочитает мясо рыбе?
- б) Какова вероятность того, что случайно выбранный девятиклассник предпочитает рыбу мясу?
- в) Сколько девятиклассников, предпочитающих рыбу мясу, вы предполагали бы встретить среди случайно выбранных 400?
2. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны AD . Случайным образом 100 раз выбирают точку данного прямоугольника. Каков ваш прогноз, сколько раз выбранной окажется точка, принадлежащая трапеции $BMCD$?

Содержание

Предисловие	3
-----------------------	---

Раздел I. ОБУЧАЮЩИЕ РАБОТЫ

Глава 1. Неравенства

О-1. Действительные числа	5
<i>Проверь себя!</i>	8
О-2. Общие свойства неравенств	9
О-3. Решение неравенств	12
<i>Проверь себя!</i>	14
О-4. Решение систем линейных неравенств	15
<i>Проверь себя!</i>	18
О-5. Доказательство неравенств	19
О-6. Что означает «с точностью до...»	21

Глава 2. Квадратичная функция

О-7. Функции (повторение)	23
О-8. Какую функцию называют квадратичной	24
О-9. График и свойства функции $y = ax^2$	29
О-10. Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль оси y	33
О-11. Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль оси x	34
О-12. Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат	35
О-13. График функции $y = ax^2 + bx + c$	37
О-14. Квадратные неравенства	42
<i>Проверь себя!</i>	47

Глава 3. Уравнения и системы уравнений

О-15. Рациональные выражения	48
<i>Проверь себя!</i>	52
О-16. Целые уравнения	53
О-17. Дробные уравнения	54
О-18. Решение задач	56
<i>Проверь себя!</i>	57
О-19. Системы уравнений с двумя переменными	58
<i>Проверь себя!</i>	60

О-20. Решение задач с помощью систем уравнений . . .	61
О-21. Графическое исследование уравнений	62

Глава 4. Арифметическая и геометрическая прогрессии

О-22. Числовые последовательности	64
О-23. Арифметическая прогрессия	67
О-24. Сумма первых n членов арифметической прогрессии	70
О-25. Геометрическая прогрессия	73
О-26. Сумма первых n членов геометрической прогрессии	76
О-27. Простые и сложные проценты	78
Проверь себя!	81

Глава 5. Статистические исследования

О-28. Выборки	83
О-29. Интервальные ряды	86
О-30. Характеристики разброса	89
О-31. Статистическое оценивание и прогноз	90
Проверь себя!	92

Раздел II. ПРОВЕРОЧНЫЕ РАБОТЫ

Глава 1. Неравенства

П-1. Действительные числа	95
П-2. Действительные числа	—
П-3. Действительные числа	96
П-4. Изображение действительных чисел на координатной прямой	—
П-5. Сравнение чисел	97
П-6. Свойства неравенств	—
П-7. Решение линейных неравенств	98
П-8. Решение линейных неравенств	99
П-9. Решение линейных неравенств	—
П-10. Решение линейных неравенств	100
П-11. Решение линейных неравенств	—
П-12. Решение систем линейных неравенств	—
П-13. Решение систем неравенств	101
П-14. Решение двойных неравенств	—
П-15. Доказательство неравенств	102
П-16. «С точностью до...»	—
П-17. Измерение «с точностью до...»	—

Глава 2. Квадратичная функция

П-18. Какую функцию называют квадратичной	103
П-19. График и свойства функции $y = ax^2$	104
П-20. Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат	105
П-21. График функции $y = ax^2 + bx + c$	106
П-22. Квадратные неравенства	—

Глава 3. Уравнения и системы уравнений

П-23. Вычисление значений выражений	107
П-24. Область определения выражения	—
П-25. Тождественные выражения	108
П-26. Упрощение выражений	—
П-27. Упрощение выражений	—
П-28. Целые уравнения	109
П-29. Дробные уравнения	—
П-30. Дробные уравнения	—
П-31. Решение задач	110
П-32. Решение задач	—
П-33. Решение задач	111
П-34. Системы уравнений с двумя переменными	—
П-35. Системы уравнений с двумя переменными	112
П-36. Решение задач с помощью систем уравнений	—
П-37. Решение задач с помощью систем уравнений	113
П-38. Решение задач с помощью систем уравнений	114
П-39. Графическое решение уравнений	—
П-40. Графическое решение уравнений	115
П-41. Графическое решение систем уравнений	—

Глава 4. Арифметическая и геометрическая прогрессии

П-42. Числовые последовательности	116
П-43. Арифметическая прогрессия	117
П-44. Сумма первых n членов арифметической прогрессии	118
П-45. Геометрическая прогрессия	—
П-46. Сумма первых n членов геометрической прогрессии	119
П-47. Простые и сложные проценты	120

Глава 5. Статистические исследования

П-48. Выборки	121
П-49. Интервальные ряды	122
П-50. Стандартное отклонение	—
П-51. Статистическое оценивание и прогноз	—

Учебное издание

Серия «Академический школьный учебник»

**Евстафьева Лариса Петровна
Карп Александр Поэлевич**

АЛГЕБРА

**Дидактические материалы
9 класс**

Зав. редакцией Т. А. Бурмистрова

Редактор Л. В. Кузнецова

Младший редактор Е. В. Трошко

Художник О. П. Богомолова

Художественный редактор О. П. Богомолова

Компьютерная верстка и техническое редактирование О. С. Ивановой

Компьютерная графика И. В. Губиной

Корректоры И. А. Григалашвили, И. В. Чернова

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 24.05.11. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 5,02. Тираж 10 000 экз. Заказ № 31750.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат». 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru